

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL
CAMPUS CAXIAS DO SUL**

**UMA ANÁLISE SOBRE A ELIMINAÇÃO GAUSSIANA NA OBTENÇÃO
DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE SISTEMAS LINEARES**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

DANIELA PELISSARI

**CAXIAS DO SUL
2018**

DANIELA PELISSARI

**UMA ANÁLISE SOBRE A ELIMINAÇÃO GAUSSIANA NA OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES
NUMÉRICAS DE SISTEMAS LINEARES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – *Campus Caxias do Sul*.

Área de concentração: Matemática Aplicada.

Orientadores:

Prof. Me. César Bublitz – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – *Campus Caxias do Sul*.

Profa. Dra. Katia Arcaro – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – *Campus Caxias do Sul*.

CAXIAS DO SUL

2018

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Caxias do Sul

51

Pelissari, Daniela

P384a

Uma análise sobre a eliminação gaussiana na obtenção de soluções numéricas de sistemas lineares[manuscrito] / Daniela Pelissari; orientadores, César Bublitz, Katia Arcaro. -- Caxias do Sul, RS, 2018. 51 f.

TCC (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do RS (IFRS), Caxias do Sul, 2018.

1. Licenciatura em matemática. 2. Eliminação Gaussiana. 3. Resolução de sistemas lineares. 4. Métodos numéricos. I. Bublitz, César. II. Arcaro, Katia. III. Título.

CDU 51

DANIELA PELISSARI

**UMA ANÁLISE SOBRE A ELIMINAÇÃO GAUSSIANA NA OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES
NUMÉRICAS DE SISTEMAS LINEARES**

A banca examinadora, abaixo listada, aprova o Trabalho de Conclusão de Curso “Uma Análise sobre a Eliminação Gaussiana na Obtenção de Soluções Numéricas de Sistemas Lineares” elaborado por Daniela Pelissari como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – *Campus* Caxias do Sul.

Profa. Dra. Greice da Silva Lorenzetti Andreis
– IFRS *Campus* Caxias do Sul

Prof. Me. Lucas Pinto Dutra – IFRS *Campus*
Caxias do Sul

Prof. Me. Nicolás Moro Müller – IFRS *Campus*
Caxias do Sul

Caxias do Sul, 22 de Novembro de 2018.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, pelo dom da vida.

Agradeço à minha mãe, Iolanda, por ter me inspirado a seguir seus passos no caminho da docência.

Aos demais familiares, pelo apoio durante a realização desse trabalho e nos anos de graduação.

Aos meus orientadores, Professor Me. César Bublitz e Professora Dra. Katia Arcaro, pelo apoio e aprendizagem que proporcionaram, na elaboração do trabalho e no decorrer do curso.

Aos membros da banca, Professora Dra. Greice da Silva Lorenzetti Andreis, Professor Me. Lucas Pinto Dutra e Professor Me. Nicolás Moro Müller, pelas relevantes contribuições para o trabalho.

E, por fim, aos demais amigos e professores que de alguma forma fizeram contribuições ao longo da vida acadêmica.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo analisar o método da Eliminação Gaussiana para a resolução de sistemas lineares, e contrapor com outros métodos numéricos, buscando verificar se o método da Eliminação Gaussiana é computacionalmente mais eficiente, em comparação com os demais. Para tanto, foi realizada uma pesquisa bibliográfica com base em autores das áreas de Álgebra Linear e Cálculo Numérico, investigando os conceitos, definições e teoremas necessários e pertinentes ao entendimento do assunto. A pesquisa inclui as definições dos principais métodos numéricos diretos e indiretos, que são Regra de Cramer, Método da Inversão, Eliminação Gaussiana, Fatoração LU, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, bem como uma discussão teórica das suas eficiências computacionais. Mediante essas informações, utilizaram-se exemplos de sistemas lineares bem e mal condicionados resolvendo-os por meio de quatro dos métodos supracitados: Eliminação Gaussiana sem pivotamento e com pivotamento parcial, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, sendo possível analisar os resultados obtidos utilizando dois softwares: Scilab e VCN, confrontando com o levantamento bibliográfico feito na pesquisa. O método da Eliminação Gaussiana apresentou-se como uma alternativa eficiente para a resolução de sistemas lineares, por exigir baixo esforço computacional e por apresentar erros nas soluções similares aos demais métodos comparados. Acrescenta-se que o recurso do pivotamento parcial é fundamental para garantir que o método funcione e que produza resultados mais precisos. Tal fato justifica a relevância dada ao método nas bibliografias da área de Álgebra Linear e no ensino da Matemática na Educação Básica.

Palavras-chave: Eliminação Gaussiana. Resolução de Sistemas Lineares. Métodos Numéricos.

ABSTRACT

The present study aims to analyze the method of Gaussian Elimination for the resolution of linear systems, and to oppose with other numerical methods, in order to verify if the method of Gaussian Elimination is computationally more efficient in comparison with the others. To answer this question, a bibliographical research was carried out based on authors of the areas of Linear Algebra and Numerical Calculus, investigating the concepts, definitions and theorems necessary and pertinent to the understanding of the study. The research includes the definitions of main direct and indirect numerical methods, which are the Cramer Rule, Inversion Method, Gaussian Elimination Method, LU Factoration, Gauss-Jacobi Method, and Gauss-Seidel Method, and a theoretical discussion of their computational efficiencies. Using this information, examples of well-conditioned and ill-conditioned linear systems are used to solve them using four of the methods listed above: Gauss Elimination without pivoting and with partial pivoting, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, being possible to analyze the results obtained using two softwares: Scilab and VCN, with the data collected in the research. The Gaussian Elimination method presents was presented as an efficient alternative for the resolution of linear systems, since it requires less computational effort and for present errors in the solutions similar to the other methods compared. It is added that the partial pivoting is fundamental to ensure that the method works and produces more accurate results. This fact justifies the relevance given to the method in the bibliographies of the area of Linear Algebra and in the teaching of mathematics in basic education.

Keywords: Gaussian Elimination. Resolution of Linear Systems. Numerical Methods.

SUMÁRIO

1	Introdução	8
2	Metodologia.....	11
3	Referencial Teórico	13
3.1	Definições iniciais	13
3.2	Soluções numéricas.....	17
3.3	Softwares para resolução de sistemas lineares	27
4	Comparação entre os métodos	28
5	Resultados e Discussões	43
6	Considerações Finais.....	48
	Referências	49

1 Introdução

O objetivo desta pesquisa é investigar o método de Eliminação Gaussiana para a resolução de sistemas lineares, avaliando se este é a melhor alternativa quando comparado com outros métodos numéricos. Para obter tal resultado, intenciona-se definir conceitos matemáticos acerca de sistemas lineares e matrizes, discutir sobre os principais métodos numéricos usados na resolução de sistemas lineares, comparar e analisar a efetividade do método de Eliminação Gaussiana perante os outros métodos numéricos encontrados na literatura.

Do ponto de vista histórico, é importante salientar que a Matemática conhecida hoje é o resultado de muitos anos de estudos, desde os primórdios da humanidade. Conforme exposto por Boyer (1974, p. 1),

Noções primitivas relacionadas com os conceitos de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana, e vislumbres de noções matemáticas se encontram em formas de vida que podem datar milhões de anos antes da humanidade.

Dentre os diversos campos da Matemática, a Álgebra Linear é um ramo que estuda, entre outros tópicos, as matrizes e sistemas lineares. Tão importante quanto o seu entendimento teórico, é compreender e utilizar sua aplicação em problemas cotidianos. Conforme descrito em Anton e Rorres (2012), constam registros da utilização da Álgebra Linear em documentos de diversas civilizações da Antiguidade, como no Egito, Babilônia, China, Grécia e Índia.

Considerando que os registros apresentam o conceito primitivo de matrizes informalmente, “O termo *matriz* foi usado pela primeira vez pelo matemático inglês James Sylvester¹, que definiu o termo em 1850, como um ‘arranjo oblongo de números” (ANTON; RORRES, 2012, p. 34). Similarmente, o conceito de Eliminação Gaussiana foi reconhecido, segundo Anton e Rorres (2012), quando o matemático Carl Friedrich Gauss² utilizou um método semelhante ao que hoje é conhecido como Eliminação Gaussiana para realizar o cálculo da órbita de um asteroide.

Com base nessa contextualização histórica, entende-se que os conceitos matemáticos conhecidos surgiram da necessidade de resolver problemas práticos. Quando esses conceitos são analisados de maneira abstrata, por vezes o entendimento não ocorre em sua

¹ James Joseph Sylvester foi um matemático inglês, que viveu entre os anos de 1814 e 1897. Fez contribuições no desenvolvimento da teoria matricial. (JAMES, 2018).

² Johann Carl Friedrich Gauss foi um matemático, astrônomo e físico alemão, que viveu entre os anos de 1777 e 1855. Contribuiu em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica. (CARL, 2018).

plenitude. Empregando aplicações aos conceitos em situações voltadas a outras áreas do conhecimento, é perceptível a importância da Matemática, a qual possibilita uma compreensão mais ampla e crítica dos problemas. Confirmando essa importância, Lay (2015, p. 1) concorda quando diz que

Na atualidade, cientistas e engenheiros trabalham em problemas muito mais complexos que se sonhava possíveis há algumas décadas. Hoje, a álgebra linear tem mais valor em potencial para os alunos, em muitas áreas científicas e de negócios, que qualquer outro assunto em matemática no âmbito graduação.

Nesse contexto, para que os conceitos matemáticos possam ser utilizados corretamente, em qualquer situação, é importante ter conhecimento suficiente sobre o assunto, o que pode e geralmente é feito por meio de análises bibliográficas, já que

Ao tratar da pesquisa bibliográfica, é importante destacar que ela é sempre realizada para fundamentar teoricamente o objeto de estudo, contribuindo com elementos que subsidiam a análise futura dos dados obtidos (LIMA; MIOTO, p. 8).

Com relação ao tema do trabalho, dentro do ramo da Álgebra Linear, a resolução de sistemas lineares pode ser feita por métodos analíticos, soluções gráficas e/ou métodos numéricos. Porém, muitas vezes não convém que os dois primeiros métodos sejam aplicados para a obtenção da solução de alguns sistemas lineares. Chapra e Canale (2008) argumentam que as soluções analíticas podem não ser indicadas em todas as situações, e que as soluções gráficas se limitam a problemas que envolvam três dimensões ou menos. Remanescem, assim, os métodos numéricos, calculados com auxílio de computadores, os quais Chapra e Canale (2008) defendem a utilização citando vantagens como a capacidade de lidar com um grande número de equações, ou seja, com sistemas de grande porte.

Como os métodos numéricos abrangem maior possibilidade de aplicações, a presente pesquisa permite investigar a utilização de um dos métodos de simples aplicação para a resolução de sistemas lineares, o método da Eliminação Gaussiana. Tal método, em comparação com os demais utilizados para resolução de sistemas lineares, não apresenta complexidade em seu emprego, já que pode ser aplicado manualmente, por meio de operações elementares nas linhas de uma matriz com a finalidade de obter um sistema equivalente (com mesma solução) mais fácil de resolver.

Em bibliografias utilizadas como referência para a disciplina de Álgebra Linear no Ensino Superior, esse método é apresentado como principal estratégia de resolução de problemas envolvendo sistemas lineares. Porém, o objetivo desses livros é apresentar a ideia básica para a solução e pouco é exposto sobre a motivação para que o método seja enfatizado, pensando-se em problemas reais, que podem envolver muitas variáveis e tornar

o tratamento matemático manual impraticável. Assim, tem-se o interesse em analisar o que estimula a apresentação desse método como preponderante.

É pertinente ressaltar que os métodos numéricos podem apresentar estimativas de erros nas soluções de sistemas lineares. Esses erros são gerados a partir da quantidade de operações realizadas, e também na quantidade de algarismos utilizados nas casas decimais dos coeficientes dos termos do sistema, que influenciam no resultado final da operação. Chapra e Canale (2008, p. 46) definem que

Os erros numéricos são causados pelo uso de aproximações para representar operações e quantidades matemáticas exatas. Eles incluem *erros de truncamento*, que resultam quando são feitas aproximações para representar procedimentos matemáticos exatos, e *erros de arredondamento*, que aparecem quando números com uma quantidade limitada de algarismos significativos são usados para representar números exatos.

Frente a isso, se estabelece um questionamento a respeito do método de Eliminação Gaussiana, pois faz-se necessário observar se os erros atingidos no resultado são relevantes em comparação a outros métodos de resolução. Dessa forma, será analisada sua aplicabilidade do ponto de vista numérico.

Ademais, existe uma motivação pessoal para realizar esse trabalho, devido à familiaridade com as disciplinas de Álgebra Linear e Cálculo Numérico, o que provocou o interesse em relacionar a pesquisa com essas áreas.

Os capítulos seguintes serão divididos em seis partes, sendo a primeira destinada à introdução do trabalho. O segundo capítulo dedica-se à metodologia empregada, na qual são descritos os procedimentos metodológicos realizados. No terceiro capítulo, são definidos conceitos iniciais acerca de sistemas lineares e matrizes, descritos métodos numéricos para resolução de sistemas lineares e apresentados dois softwares para a resolução de sistemas lineares. O quarto capítulo destina-se à resolução de sistemas lineares por meio de alguns dos métodos numéricos comentados no capítulo três. No quinto capítulo, é realizada a análise dos resultados obtidos no capítulo anterior, com a bibliografia inicial da pesquisa. O sexto capítulo destina-se às considerações finais e à resolução do problema inicial da pesquisa, no qual pode-se confirmar a eficiência do método da Eliminação Gaussiana, baseado nos dados encontrados e nos sistemas resolvidos.

2 Metodologia

Conforme Gil (2010, p. 26-27), existem alguns sistemas que possibilitam classificar pesquisas, analisando a área do conhecimento, a finalidade e os objetivos gerais. Em relação à área do conhecimento, conforme critérios definidos pelo CNPq³, a pesquisa enquadra-se na área 1: Ciências Exatas e da Terra. Sobre a finalidade, o trabalho condiz com a Pesquisa Básica Estratégica, por ser voltada à ampliação de conhecimentos, sugerindo informações úteis que poderão ser utilizadas na solução de problemas práticos. Acerca dos objetivos gerais, a presente pesquisa adequa-se como Pesquisa Exploratória, por proporcionar maior familiaridade com o problema estudado, por meio do levantamento bibliográfico.

A abordagem teórica deste trabalho foi a pesquisa bibliográfica, baseada em livros e outros materiais publicados por autores da área. Segundo Gil (2010, p. 45), a pesquisa bibliográfica segue as seguintes etapas:

- a) escolha do tema;
- b) levantamento bibliográfico preliminar;
- c) formulação do problema;
- d) elaboração do plano provisório de assunto;
- e) busca das fontes;
- f) leitura do material;
- g) fichamento;
- h) organização lógica do assunto; e
- i) redação do texto.

Inicialmente, foi definido Álgebra Linear como o tema da pesquisa, e a partir deste foi selecionada uma bibliografia principal, na qual foram escolhidos livros que serviram como suporte para a formulação do problema de pesquisa e para o embasamento teórico da mesma. Após a indicação do problema, foi elaborado o plano provisório, enumerando os tópicos a serem abordados para o desenvolvimento da pesquisa, fazendo uso de uma estrutura lógica que facilite sua compreensão.

Posteriormente, foi selecionada a bibliografia complementar, com obras que possibilitam contribuições ao material bibliográfico utilizado inicialmente. Após a seleção do material, foram realizadas a leitura analítica prévia sobre o tema e o fichamento, no qual foram organizadas as principais informações pertinentes ao trabalho. Por fim, foi realizada a organização lógica do assunto, com a sequência de tópicos necessários para a resolução do problema de pesquisa, com o propósito de aprofundar o conhecimento acerca do tema, por meio do desenvolvimento da produção escrita.

Inicialmente, foram descritas algumas definições preliminares acerca de sistemas lineares e matrizes, relevantes para a compreensão do trabalho. Em seguida, buscou-se

³ Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

explicar o que são soluções numéricas e quais os principais métodos numéricos utilizados para obter as soluções de sistemas lineares. Por fim, foi descrito e exemplificado o método da Eliminação Gaussiana.

Dentre os métodos estudados, foram selecionados dois para serem comparados ao método da Eliminação Gaussiana: Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. Essa escolha se deu pelo fato de que os mesmos têm menos restrições quanto ao tamanho dos sistemas e se destacam do ponto de vista computacional, de acordo com a pesquisa bibliográfica prévia.

Para finalizar a pesquisa, foram elaborados sistemas lineares especificamente para esses testes, a partir de soluções com números inteiros, para serem resolvidos com os softwares Scilab e VCN por meio dos métodos numéricos estudados. A seleção dos softwares foi motivada por ambos serem de uso livre e já utilizados anteriormente pela autora.

Com esses resultados, foi possível comparar os dados obtidos, tais como os erros, tempos de execução (exceto no software VCN, no qual não é possível medir o tempo, enquanto no Scilab foi calculada a média do tempo após resolver cada sistema cinco vezes) e as soluções encontradas para os sistemas. Assim, foi realizada uma comparação utilizando os três métodos, Eliminação Gaussiana, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, e foram analisados os dados obtidos, buscando reforçar e exemplificar os resultados da pesquisa bibliográfica para o problema inicial.

Definição 3.1.4 Uma matriz é um agrupamento retangular de elementos. Dizemos que os elementos nesse agrupamento são as entradas da matriz, dispostas em linhas e colunas.

O tamanho de uma matriz é definido pelo seu número de linhas e colunas. Assim, sejam m e n números inteiros e positivos; uma matriz de tamanho $m \times n$ será um arranjo retangular de números reais ou complexos que possui m linhas e n colunas.

A notação utilizada para denotar uma matriz é dada, geralmente, por uma letra maiúscula, e para seus elementos é usada a respectiva letra minúscula seguida de dois índices, ou seja, no caso de uma matriz A , cada termo é dado por a_{ij} , em que o índice i representa a linha em que o elemento está, e o índice j , a coluna.

Definição 3.1.5 Um sistema linear como dado em (1) pode ser representado por uma matriz dos coeficientes de cada variável alinhados em colunas. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes do sistema, e a matriz

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

é a matriz aumentada do sistema.

Definição 3.1.6 Seja A uma matriz como na Definição 3.1.4. Dizemos que a linha de uma matriz é cada sequência i horizontal de elementos, tal como

$$A_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}].$$

Definição 3.1.7 Seja A uma matriz como na definição 3.1.4. Dizemos que a coluna de uma matriz é cada sequência j vertical de elementos, tal como

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Definição 3.1.8 Vetor pode ser definido como uma matriz $n \times 1$ (ou seja, com n linhas e apenas uma coluna) ou como uma lista da forma $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, onde $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são os n elementos do vetor. Independentemente da notação utilizada, aqui serão tratadas as duas representações como equivalentes, ou seja,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Definição 3.1.9 Em notação matricial, um sistema pode ser escrito como $Ax = b$, onde A é a matriz dos coeficientes, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ é o vetor das incógnitas e $b = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ é o vetor dos termos independentes.

Definição 3.1.10 Uma matriz A com n linhas e n colunas é dita uma matriz de ordem n . Em particular, dizemos que essa matriz é uma matriz quadrada.

Definição 3.1.11 Seja D uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que a diagonal principal da matriz D é composta pelos elementos d_{ij} , com $i = j$, ou seja, $d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn}$. Em particular, se $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$, dizemos que D é uma matriz diagonal e tem a forma dada por

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix},$$

onde d_{ij} com $i = j$ são números reais ou complexos quaisquer.

Definição 3.1.12 Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Uma matriz é dita triangular superior se todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero e dita triangular inferior se todos os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero. Representaremos por A_1 e A_2 , as matrizes triangulares superior e inferior, respectivamente, ou seja,

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definição 3.1.13 Seja I uma matriz diagonal de ordem n . Dizemos que I é uma matriz identidade se todos os elementos da diagonal principal forem iguais a 1, ou seja

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Uma notação que pode ser utilizada para essa matriz é I_n , em que n é a ordem da matriz identidade. A matriz identidade é um elemento neutro da multiplicação, obedecendo à seguinte propriedade:

$$AI_n = I_m A = A,$$

onde A é uma matriz de ordem $m \times n$.

As matrizes e suas propriedades podem auxiliar na solução de sistemas lineares (ao considerarmos as matrizes aumentadas dos mesmos), principalmente do ponto de vista numérico.

Definição 3.1.14 Dois sistemas são ditos equivalentes se eles possuem a mesma solução.

Definição 3.1.15 Retrosubstituição é um processo utilizado para obter a solução de um sistema triangular superior, que consiste em substituir o valor da última variável nas equações superiores, de baixo para cima, a fim de se determinar o valor de cada variável.

Definição 3.1.16 *Flop* é um ponto flutuante caracterizado por uma operação de adição, subtração, multiplicação ou divisão. O número de *flops* associado a um processo numérico é dado pela quantidade de operações desse tipo que são realizadas.

Definição 3.1.17 (O grande \mathcal{O}): Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pode-se escrever:

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ quando } x \rightarrow \infty$$

se, e somente se, existe uma constante positiva M e um número real x_0 tais que

$$|f(x)| \leq M|g(x)|, \forall x \geq x_0.$$

Essa notação é utilizada para descrever o tamanho do erro de funções. No contexto desse trabalho, f será a função que dá o número de *flops* em função do número de variáveis do sistema.

Definição 3.1.18 O erro \mathcal{E} produzido por uma solução \bar{x} do sistema $Ax = b$ pode ser avaliado pela equação

$$\mathcal{E} = \max_{1 \leq i \leq n} |r_i|,$$

sendo r_i a i -ésima componente do vetor resíduo R , dado pela equação

$$R = b - A\bar{x}.$$

3.2 Soluções numéricas

Esta seção visa apresentar as principais definições sobre as soluções numéricas para sistemas lineares, com base nos autores Ruggiero e Lopes (1996), Renfro (2004), Bortoli *et al.* (2018) e Cheng (2010).

Para a resolução de sistemas lineares com três equações ou menos, existem métodos que podem ser utilizados, tais como o método gráfico, a regra de Cramer e a eliminação de variáveis. Mas para os casos em que os sistemas lineares possuem mais do que três equações, sugerem-se técnicas mais eficazes com a utilização de métodos numéricos. Estes podem ser divididos em diretos e indiretos ou iterativos.

Definição 3.2.1 Método direto é aquele que fornece a solução “exata” (a menos de erros de arredondamento) do sistema linear, caso exista, após um número finito de operações.

Definição 3.2.2 Método indireto é aquele que gera uma sequência de vetores, a partir de uma aproximação inicial. Essa sequência pode convergir para a solução, caso exista.

Os métodos numéricos diretos, de simples aplicação para obtenção da solução de sistemas lineares, são:

- i) Regra de Cramer: consiste na utilização de determinantes para obter a solução do sistema;
- ii) Método da Inversão: a solução do sistema é obtida a partir da matriz inversa;
- iii) Método de Eliminação Gaussiana: transforma o sistema linear original em um sistema equivalente, mas mais fácil de resolver, do qual a solução é obtida por retrosubstituição;
- iv) Fatoração LU: a matriz dos coeficientes do sistema é decomposta em duas matrizes triangulares, para que se obtenha a solução dos sistemas lineares triangulares e, posteriormente, do sistema linear original.

Em contrapartida, os métodos numéricos indiretos, geralmente calculados usando algoritmos computacionais, partem de um valor inicial para obter uma solução aproximada para o sistema. Estes métodos são:

- i) Método de Gauss-Jacobi: consiste em processos iterativos a partir de uma matriz coluna dada inicialmente;
- ii) Método de Gauss-Seidel: parte de uma matriz coluna dada inicialmente para realizar operações de iteração.

Definição 3.2.3 Seja uma matriz A de ordem n . Uma submatriz A_{ij} de A é uma matriz de ordem $n - 1$ obtida eliminando-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna de A .

Definição 3.2.4 Considerando o conjunto das matrizes quadradas de elementos reais, seja A uma matriz de ordem n desse conjunto. Chama-se determinante da matriz A o número que se pode obter operando com os elementos de A da forma:

- i) A de ordem $n = 1$: o determinante de A é igual ao único elemento de A ;
- ii) A de ordem $n \geq 2$: o determinante de $A = [a_{ij}]$ é a soma de n termos da forma $\pm a_{ij} \det A_{ij}$, com os sinais de mais e menos se alternando, em que os elementos $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ estão na primeira linha de A . Em símbolos,

$$\det A = a_{1j} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}.$$

Definição 3.2.5 Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$, o cofator (i, j) de A é o número C_{ij} dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Teorema 3.2.6 O determinante de uma matriz A $m \times n$ pode ser calculado pela expansão em cofatores em relação a qualquer linha ou coluna. A expansão em relação à i -ésima linha usando cofatores é dada por

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}.$$

A expansão em cofatores em relação à j -ésima coluna é dada por

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots + a_{nj}C_{nj}.$$

A demonstração desse Teorema pode ser encontrada em (Franklin, 2012, p. 20).

3.2.7 Regra de Cramer

Consideramos um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Nesse caso, a matriz A dos coeficientes é quadrada, e possui um determinante D . Para aplicar a estratégia, primeiramente calcula-se o determinante D_j da matriz A . Em seguida, cada coluna j da matriz é substituída pelo vetor b dos termos independentes, e é calculado o determinante da nova matriz. Por fim, cada termo do vetor solução x é dado por

$$x_j = \frac{D_j}{D}.$$

Conforme Renfro (2004), a Regra de Cramer é um método que exige grande esforço computacional, comparado aos demais métodos. Para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem n , utiliza-se $(n-1)(n!)$ operações. Incluindo as demais operações necessárias, a Regra de Cramer requer $(n-1)((n+1)!)$ operações. O erro de arredondamento pode ser significativo para a aplicação do método em matrizes com coeficientes não inteiros. Por isso, a Regra de Cramer tem maior utilização na resolução de

sistemas com poucas equações, o que diverge de situações práticas, em que geralmente originam sistemas de grande porte.

Definição 3.2.8 Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Essa matriz é inversível se, e somente se, existir uma matriz B , também de ordem n , de modo que

$$AB = BA = I_n.$$

A matriz I_n é a matriz identidade de ordem n . Essa matriz B , caso exista, é única, chamada de inversa de A e indicada por A^{-1} .

Teorema 3.2.9 Uma matriz A é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

A demonstração desse Teorema pode ser encontrada em Franklin (2012, p. 32).

3.2.10 Método da Inversão

Dado um sistema de n incógnitas com n equações $Ax = b$, pode-se multiplicar ambos os lados da igualdade pela matriz inversa de A , A^{-1} , caso ela exista, de modo que

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b.$$

Como a multiplicação $A^{-1}A = I_n$, e o produto de qualquer matriz x com n linhas pela matriz identidade de ordem n resulta em uma matriz igual a x , tem-se, pelas propriedades da multiplicação de matrizes, que

$$x = A^{-1}b.$$

Logo, a solução única de um sistema linear de ordem n é dada pelo vetor x . Essa solução será obtida se, e somente se, o determinante da matriz A for diferente de zero. Portanto, esse método não poderá ser utilizado em qualquer sistema linear cuja matriz dos coeficientes seja quadrada. Além disso, a obtenção da matriz inversa envolve muitas operações, não tornando o método tão eficiente como os demais (DATTA, 1989).

3.2.11 Método da Eliminação Gaussiana

Com base nos autores Ruggiero e Lopes (1996), Lay (2015), Anton e Rorres (2012), Eckhard (2016) e Golub e Loan (2013), serão apresentadas as principais definições sobre o método de Eliminação Gaussiana.

O método da Eliminação Gaussiana (ou Eliminação de Gauss) consiste em realizar operações elementares nas linhas de uma matriz aumentada, com o objetivo de triangularizar⁴ a matriz e obter a solução do sistema.

⁴ Aplicar operações elementares até a obtenção de uma matriz triangular.

Considerando um sistema linear $Ax = b$. Podem ser aplicadas sobre as equações desse sistema, de modo a se obter um novo sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ equivalente ao primeiro, uma sequência de operações, escolhidas entre:

- i) trocar duas equações de posição;
- ii) multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- iii) adicionar um múltiplo de uma equação à outra equação.

Da mesma forma, operações equivalentes a essas podem ser aplicadas nas linhas da matriz aumentada de um sistema linear. São as chamadas operações elementares sobre as linhas de uma matriz (escalonamento):

- i) trocar duas linhas entre si;
- ii) multiplicar uma linha por uma constante não nula;
- iii) adicionar um múltiplo de uma linha à outra linha.

Ao aplicar essas operações em um sistema linear, são realizados cálculos de tal maneira que se possa obter um sistema equivalente mais fácil de resolver, de modo que, ao se resolver o segundo tem-se, conseqüentemente, a solução do primeiro sistema.

Definição 3.2.12 O primeiro elemento não nulo de uma linha de uma matriz, considerando da esquerda para a direita (em uma linha não nula) é chamado de pivô.

Definição 3.2.13 O método da Eliminação Gaussiana sem pivotamento consiste em modificar um sistema linear, por meio de operações elementares (sem troca de linhas), obtendo um sistema triangular equivalente. A partir desse sistema triangular, é possível obter a solução por meio da retrossubstituição.

Definição 3.2.14 (Pivotamento parcial) Dada uma matriz A de ordem n , o pivô no j -ésimo estágio é o termo $a_{jj}^{(j-1)}$ (termo a_{jj} no estágio anterior). O pivotamento parcial consiste em, antes de iniciar o j -ésimo estágio, permutar linhas da matriz $A^{(j-1)}$ (matriz A no estágio $j - 1$) de modo a obter

$$|a_{jj}^{(j-1)}| \geq |a_{ij}^{(j-1)}|, \forall i = j, \dots, n.$$

Em palavras, o pivô é escolhido como sendo um dos elementos de maior valor absoluto dentre $a_{jj}^{(j-1)}, a_{j+1,j}^{(j-1)}, \dots, a_{nj}^{(j-1)}$, em uma submatriz que desconsidera as i primeiras linhas da matriz A .

Segundo Andretta (2012), a utilização dessa técnica ajuda a restringir os erros de arredondamento, podendo diminuir divergências na solução do sistema. Além disso, permite a continuidade do processo nos casos em que um zero aparece na posição pivô se usada a Eliminação Gaussiana sem pivotamento.

Definição 3.2.15 (Pivotamento completo) Dada uma matriz A de ordem n , no j -ésimo passo é escolhido para pivô o elemento de maior módulo entre todos os elementos que ainda atuam no processo de eliminação, ou seja, o elemento pivô será $\max_{i,j} |a_{ij}^{(j-1)}|$. Em palavras, o pivô é escolhido como sendo o elemento de maior valor absoluto dentre $a_{jj}^{(j-1)}, a_{j+1,j+1}^{(j-1)}, \dots, a_{nn}^{(j-1)}$, em uma submatriz que desconsidera as i primeiras linhas e colunas da matriz A .

A utilização dessa estratégia não é usualmente empregada, pois, segundo Balbo *et al.* [200-], envolve uma comparação entre os elementos envolvidos na troca de linhas e colunas, o que acarreta esforço computacional maior do que utilizando a estratégia de pivotamento parcial.

Definição 3.2.16 Uma matriz está em forma escalonada por linhas se ela satisfizer as três seguintes propriedades:

- i) Todas as linhas não nulas estão acima de qualquer linha que só contenha zeros;
- ii) O pivô de cada linha não nula está em uma coluna à direita do pivô da linha acima;
- iii) Todos os elementos na coluna de um pivô que estão abaixo dele são iguais a zero.

Se uma matriz em forma escalonada satisfizer as condições adicionais a seguir, então ela estará na forma escalonada reduzida:

- iv) O pivô de cada linha não nula é igual a 1;
- v) Cada pivô igual a 1 é o único elemento não nulo em sua coluna.

Definição 3.2.17 Um sistema triangular superior escalonado pode ser classificado, de acordo com a quantidade m de equações e n de incógnitas. Com base nas definições 3.1.3 e 3.1.12, temos que, no caso em que nenhuma linha da matriz dos coeficientes seja nula:

- i) Se $m = n$, então o sistema é possível e determinado (SPD);
- ii) Se $m < n$, então o sistema é possível e indeterminado (SPI);

No entanto, se o escalonamento resultar em uma linha nula na matriz dos coeficientes, então:

- i) Se $b_m = 0$, prossegue-se com o escalonamento;
- ii) Se $b_m \neq 0$, então o sistema é impossível (SI).

Para ilustrar alguns dos conceitos definidos, consideremos um exemplo simples de aplicação da Eliminação Gaussiana, de Lay (2015, p. 3).

Exemplo 3.2.18 Dado o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases},$$

podemos formar uma matriz com os coeficientes de cada variável, alinhados em colunas, conforme segue abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

e a matriz aumentada do sistema, dada por

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}.$$

Para realizar o procedimento da Eliminação Gaussiana, manteremos a variável x_1 na primeira equação, e eliminá-lo das demais. Assim, será necessário realizar uma substituição da terceira linha, por ela mesma somada a 4 vezes a linha 1, ou seja,

$$\begin{aligned} -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \\ + 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 &= 0 \\ \hline 0x_1 - 3x_2 + 13x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Portanto, reescrevendo a matriz com a nova equação, tem-se:

$$\tilde{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix},$$

onde a notação $A \sim B$ indica que a matriz B foi obtida da matriz A a partir de operações elementares nas suas linhas.

A seguir, devemos manter a variável x_2 nas primeira e segunda equações, e eliminá-la da terceira. Logo, pode-se multiplicar a segunda equação por $\frac{1}{2}$, para obter o coeficiente igual a 1, com a finalidade de facilitar o próximo passo, não sendo obrigatória nesse momento. Assim, obtém-se a matriz

$$\tilde{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}.$$

Agora, faremos a substituição da terceira linha, por ela somada a 3 vezes a linha 2, ou seja,

$$\begin{aligned} -3x_2 + 13x_3 &= -9 \\ + 3x_2 - 12x_3 &= 12 \\ \hline 0x_2 + 1x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Reescrevendo a matriz, obtém-se

$$\tilde{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

O sistema linear equivalente obtido, representado pela matriz escalonada, poderá ser resolvido por meio de retrosubstituição, e assim é possível obter os valores para os termos x_1, x_2 e x_3 , da solução do sistema, já que o mesmo é possível e determinado (SPD).

Ao realizar as operações acima, pode-se obter uma matriz na forma escalonada (ou na forma escalonada por linhas).

Percebe-se que o método pode conduzir a um trabalho manual excessivo no caso de sistemas de grande porte, mas, também, que o mesmo parece poder ser implementado numericamente com facilidade. Resta, então, analisar a aplicabilidade do ponto de vista numérico, pensando-se, por exemplo, em possíveis problemas como os erros de truncamento e de arredondamento.

Conforme informações de Datta (2010), o algoritmo para resolução de sistemas lineares com o método de Eliminação Gaussiana sem pivotamento requer aproximadamente $\frac{2n^3}{3}$ *flops*, ou operações a serem realizadas na matriz, a fim de obter sua solução, sendo n a quantidade de variáveis do sistema (ou a ordem da matriz dos coeficientes que representa esse sistema). A contagem de operações é realizada da seguinte maneira:

Passo 1: Calcular $(n - 1)$ multiplicadores e atualizar $(n - 1)^2$ entradas na matriz A . Cada multiplicador requer um *flop* e atualizar cada entrada requer dois *flops*. Assim, o passo 1 requer $2(n - 2)^2 + (n - 2)$ *flops*.

Passo 2: Computar $(n - 2)$ multiplicadores e atualizar $(n - 2)^2$ entradas requer $2(n - 2)^2 + (n - 2)$ *flops*.

Em geral, o passo k requer $2(n - k)^2 + (n - k)$ *flops*. Como existem $(n - 1)$ etapas, tem-se

$$\begin{aligned} \text{Total de flops} &= \sum_{k=1}^{n-1} 2(n - k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (n - k) \\ &= 2 \left[\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} \right] \\ &\simeq \left[\frac{2n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2) \right]. \end{aligned}$$

observando que, dado qualquer $r \in \mathbb{R}$,

$$1^2 + 2^2 + \dots + r^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}$$

e

$$1 + 2 + \dots + r = \frac{r(r+1)}{2}.$$

Como uma estratégia para conter possíveis problemas durante a aplicação do método sem pivotamento, como por exemplo, quando o elemento que deveria ser pivô da matriz, em um determinado estágio do processo, for nulo, pode-se optar por utilizar o método de Eliminação Gaussiana com pivotamento parcial. O mesmo também ajuda a reduzir os erros de arredondamento.

3.2.19 Fatoração LU

Seja o sistema linear $Ax = b$. O método consiste em decompor a matriz A dos coeficientes em dois fatores, e resolver uma sequência de sistemas lineares que conduzirá à solução do sistema original. Essa decomposição é consequência da aplicação do método da eliminação gaussiana, que utiliza de operações elementares nas linhas da matriz, com o objetivo de obter uma matriz triangular superior. O seguinte teorema traz detalhes da sua aplicação.

Teorema 3.2.20 Se uma matriz quadrada A pode ser reduzida à forma escalonada por linhas U com eliminação gaussiana sem pivotamento, então A pode ser fatorada como $A = LU$.

A fatoração LU será realizada da seguinte maneira:

- i. matriz L será uma matriz triangular inferior com diagonal unitária;
- ii. matriz U será uma matriz triangular superior.

Sendo assim, temos

$$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b.$$

A solução do sistema é obtida da resolução dos sistemas lineares triangulares:

$$Ly = b$$

e

$$Ux = y$$

O vetor y , obtido no final da resolução do primeiro sistema, é utilizado no segundo sistema, calculando-se assim a solução do sistema inicial. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Golub e Loan (2013).

Para resolver um sistema triangular, utilizam-se $\mathcal{O}(n^2)$ operações. Analogamente ao método da Eliminação Gaussiana, ao final da fatoração LU , são realizadas aproximadamente $\frac{2n^3}{3}$ operações, em que n é a quantidade de variáveis do sistema (ou a ordem da matriz dos coeficientes que representa esse sistema).

Observamos, então, que os métodos de Eliminação Gaussiana e Fatoração LU são equivalentes computacionalmente, mesmo que sejam distintos no procedimento final, conforme Golub e Loan (2013) e Datta (1989). Portanto, ao comparar as informações de um problema resolvido pelos métodos da Eliminação Gaussiana e Fatoração LU , as informações obtidas poderiam não evidenciar as divergências que buscamos.

3.2.21 Método de Gauss-Jacobi

Dado o sistema linear $Ax = b$, onde $i = 1, 2, \dots, n$,

O método de Gauss-Seidel é derivado do método de Gauss-Jacobi. O processo consiste em, a cada iteração, utilizar os valores já calculados na própria iteração para tentar assegurar uma convergência mais rápida. Dada uma aproximação inicial $x^{(0)}$, obtém-se uma sequência de soluções por meio de

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}} \\ x_2^{k+1} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{nn}x_n^{(k+1)}}{a_{nn}} \end{cases}.$$

A solução aproximada será $\bar{x} = x^{(n)}$. O seguinte teorema estabelece um critério que assegura a convergência do método.

Teorema 3.2.24 (Critério de Sassenfeld): Sejam $\beta_1 = \frac{|a_{12}|+|a_{13}|+|a_{14}|+\dots+|a_{1n}|}{|a_{11}|}$ e $\beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1+|a_{j2}|\beta_2+\dots+|a_{jj-1}|\beta_{j-1}+|a_{jj+1}|+\dots+|a_{jn}|}{|a_{jj}|}$, com $i \leq j \leq n$, $j \neq 1$. Seja $\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \{\beta_j\}$. Se $\beta < 1$, então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente, qualquer que seja a aproximação inicial. Além disso, quanto menor for β , mais rápida será a convergência. A demonstração do teorema pode ser encontrada em Balbo *et al.* [200-].

O critério das linhas, utilizado no método de Gauss-Jacobi também pode ser aplicado para o estudo da convergência do método de Gauss-Seidel. Porém, o critério de Sassenfeld pode ser satisfeito mesmo que o critério das linhas não o seja.

Semelhante ao Método de Gauss-Jacobi, no Método de Gauss-Seidel são realizadas $\mathcal{O}(n^2 \times m)$ operações, em que n são as entradas de números diferentes de zero da matriz A e m é o número de iterações realizadas, conforme detalhado em Cheng (2010).

Assim, é possível optar por um dentre os diversos métodos numéricos para a obtenção da resolução de um sistema linear de acordo com suas particularidades. Para fins de comparação com o método de Eliminação Gaussiana serão considerados apenas os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss Seidel por serem os que se destacam do ponto de vista computacional (desconsiderando a Fatoração LU, por ser equivalente computacionalmente à Eliminação Gaussiana, e, por isso, não fornecer resultados pertinentes à análise pretendida), de acordo com o levantamento bibliográfico realizado.

3.3 Softwares para resolução de sistemas lineares

O Scilab (SCILAB, 2017) é um software livre e de código aberto para comunicação numérica, criado na década de 90. Possui diversas funções matemáticas, como: Matemática e simulação, visualização 2D e 3D, otimização, estatística, projeto e análise de sistema de controle, processamento de sinais, entre outros. Para utilizar cada uma destas funções matemáticas, se faz necessário um conhecimento prévio sobre linguagem de programação, pois “Quando queremos escrever (criar, desenvolver) um software para realizar um determinado tipo de processamento de dados, devemos escrever um programa ou vários programas interligados” (ASCENCIO; CAMPOS, 2002, p. 2).

Especificamente nas funções matemáticas, Ascencio e Campos (2012) explicam que um software permite elaborar algoritmos para realizar diversas operações, sendo que esse algoritmo consiste em uma sequência de operações e ações, que devem ser realizadas para que se chegue ao resultado esperado. Assim, para a utilização do software Scilab, é necessário um conhecimento prévio sobre linguagem de programação e sobre a função matemática a que se pretende aplicar.

Outro software que pode auxiliar na computação numérica é o VCN, ou Visual Cálculo Numérico. Segundo Silva e Oliveira (2017), o VCN é um software de cunho matemático estatístico, desenvolvido para realizar operações de interpolação, derivação, integração, solucionar equações diferenciais, sistemas lineares e problemas de otimização. Diferentemente do Scilab, para utilizar esse software, não é necessário conhecimentos acerca de programação, mas sim, carregar os dados iniciais, e o software apresenta a solução do problema.

4 Comparação entre os métodos

Para que sejam comparados alguns dos principais métodos numéricos com o método da Eliminação Gaussiana, serão utilizados os softwares Scilab e VCN para a resolução de sistemas lineares aleatórios. Assim, será possível analisar a magnitude do erro obtido na solução, tempo de execução e a quantidade de iterações realizadas (no caso dos métodos indiretos) para cada sistema, com ambos os softwares.

4.1 Definições

Nesta subseção, serão feitas definições necessárias para a comparação dos métodos e, conseqüentemente, a compreensão do trabalho.

Definição 4.1.1 Seja $M^{m \times n}$ o espaço vetorial das matrizes $m \times n$ reais ou complexas. Uma norma $\| \cdot \|$ é uma função que associa a cada matriz um número real não negativo e satisfaz as propriedades

1. $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$;
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Entre as diversas normas matriciais existentes, uma que é frequentemente utilizada, e que inclusive é usada no cálculo do condicionamento de uma matriz no Scilab, é a norma 2 $\|A\|$, a qual é dada por

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)},$$

onde $\lambda_{\max}(A^T A)$ denota o maior autovalor⁵ da matriz $A^T A$.

Definição 4.1.2 Número de condição, ou condicionamento, de uma matriz inversível A é definido como

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|,$$

em que $\|A\|$ é a norma da matriz A , e fornece uma estimativa de precisão que se pode obter para uma solução aproximada de um sistema linear com matriz dos coeficientes A .

Definição 4.1.3 Sistema bem condicionado é aquele no qual a matriz dos coeficientes possui um número pequeno de condicionamento, o que implicará que o limitante de erro relativo será pequeno, e será possível obter uma solução aproximada.

⁵ Dada uma matriz quadrada de ordem n , com entradas reais, um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A quando existe um vetor não nulo \vec{v} tal que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Definição 4.1.4 Sistema mal condicionado é aquele em que, realizando uma pequena modificação nos coeficientes ou constantes do sistema resulta em grandes modificações na solução. Quanto maior o valor de $\text{cond}(A)$, maior o limitante do erro relativo e, conseqüentemente, mais difícil a obtenção de um bom resultado como solução.

Ainda, Golub e Loan (2013) afirmam que um sistema bem condicionado é tal que $\text{cond}(A) \approx O(1)$, sendo A a matriz do sistema. No entanto, os mesmos autores destacam que diferentes normas matriciais (além da apresentada nesta pesquisa) podem ser usadas na definição de condicionamento. Assim, fica difícil definir um valor, para o condicionamento, que sirva de referência para separar sistemas bem e mal condicionados. O certo é que quanto maior ele for, pior a situação é. Aqui, vamos dizer que um sistema é mal condicionado quando o condicionamento for maior do que 30.

Conforme Justo *et al.* (2018) “Um problema bem-condicionado é um problema em que os erros de arredondamento se propagam de forma menos importante; enquanto problemas mal-condicionados são problemas em que os erros se propagam de forma mais relevante”. Assim, um sistema mal condicionado pode ocasionar em uma distorção no resultado, para qualquer método numérico. De maneira geral, a bibliografia pesquisada não especifica parâmetros claros para a caracterização das matrizes em bem ou mal condicionadas, mas Chapra e Canale (2008) ressaltam que o fato de o número de condicionamento ser consideravelmente maior do que a unidade sugere que o sistema é mal condicionado.

A seguir, são apresentados exemplos elaborados especialmente para esses testes, contendo matrizes bem e mal condicionadas e suas soluções exatas ou aproximadas utilizando cada um dos quatro métodos: Eliminação Gaussiana sem pivotamento e com pivotamento parcial, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. A partir desses resultados, espera-se evidenciar que, além da Eliminação Gaussiana exigir menor esforço computacional, em comparação com os demais métodos, e conseqüentemente, ser mais breve no processo de resolução, supomos que o método solucionará todos os exemplos, se sobressaindo sobre os demais, já que os mesmos podem apresentar divergências ao longo da aplicação.

4.2 Sistema a

O sistema a possui 5 equações e 5 variáveis e é dado por

$$a = \begin{cases} 10x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 5x_5 = 10 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 0x_4 - x_5 = -8 \\ 0x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 = 17 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 - x_5 = -18 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 10x_5 = 10 \end{cases},$$

sendo que sua matriz dos coeficientes é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -10 \end{bmatrix}.$$

O sistema a tem como solução exata, facilmente verificável, a matriz S_A , dada por

$$S_A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando $\text{cond}(A)$, obtém-se 3,7412, o que implica que o sistema é bem condicionado. O sistema a será resolvido com 4 métodos: método da Eliminação Gaussiana sem pivotamento e com pivotamento parcial, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. Serão computadas as informações relativas à solução, o erro produzido (conforme a definição 3.1.18) e o tempo médio da resolução. No exemplo, serão apresentados os códigos utilizados no Scilab para obter a resolução do sistema, e a figura representando a resolução do sistema pelo software VCN.

4.2.1 Resolução do Sistema a com o método da Eliminação Gaussiana sem pivotamento.

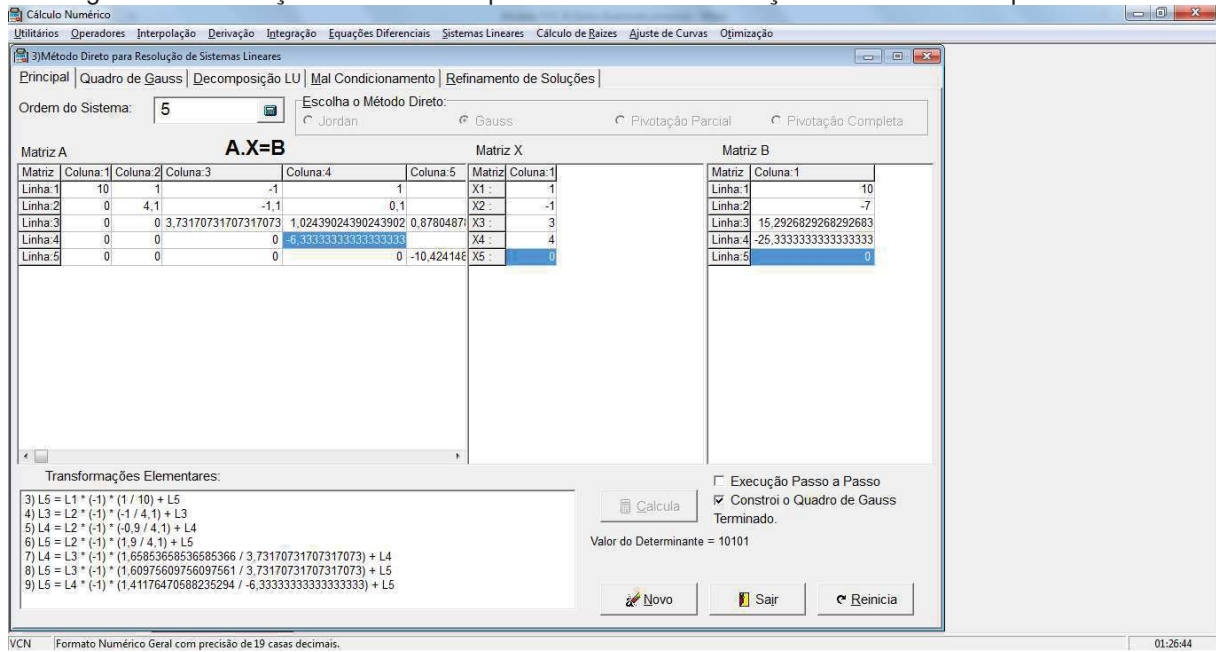
a) Scilab: O código para resolução, adaptado de Justo *et al.* (2018), foi o seguinte:

```
A=[10 1 -1 1 5; -1 4 -1 0 0; 0 -1 4 1 1; -1 -1 2 -6 1; 1 2 1 2 -10 ]
b=[10; -8; 17; -18; 10]
Nx=size(A,1)
M(1:Nx,1:Nx+1)=0
M(1:Nx,1:Nx)=A
M(1:Nx,Nx+1)=b
for i= 1:Nx
    pivot=M(i,i)
    for j=i+1:Nx
        M(j,:)=M(j,:)-M(i,:)*(M(j,i)/pivot)
    end
end
b1=M(:,Nx+1)
A1=M(:,1:Nx)
x=zeros(1,5)
for i=Nx:-1:1
    x(i)=(b1(i)-A1(i,:)*x')/A1(i,i);
end
erro=A*x'-b
printf("x =")
disp(x)
printf("erro =")
disp(max(abs(erro)))
```

O resultado obtido como solução do sistema foi $(1 \ -1 \ 3 \ 4 \ 0)$, com erro de $3,553D-15^6$, e o tempo médio de execução foi de 0,00336384 segundos.

b) VCN:

Figura 1 – Resolução do Sistema a pelo método da Eliminação Gaussiana sem pivotamento.



Fonte: Elaboração da autora com o software VCN.

O resultado obtido como solução do sistema foi $(1 \ -1 \ 3 \ 4 \ 0)$, com erro de $3,553D-15$, enquanto o tempo não é medido com o software VCN.

4.2.2 Resolvendo o Sistema a com o método da Eliminação Gaussiana com pivotamento parcial.

a) Scilab: O código para resolução, adaptado de Justo *et al.* (2018), foi o seguinte:

⁶ $3,553D-15 = 3,553 \cdot 10^{-15}$


```

A=[10 1 -1 1 5; -1 4 -1 0 01; 0 -1 4 1 1; -1 -1 2 -6 1; 1 2 1 2 -10 ]
b=[10; -8; 17; -18; 10]
Nx=size(A,1)
M(1:Nx,1:Nx+1)=0
M(1:Nx,1:Nx)=A
M(1:Nx,Nx+1)=b
for i= 1:Nx
    [pivot,pos] =max(abs(M(i:Nx,i)))
    pos = pos + (i-1)
    pivot=M(pos,i)
    M([i, pos],:)= M([pos, i],:)
    for j=i+1:Nx
        M(j,:)=M(j,:)-M(i,:)*(M(j,i)/pivot)
    end
end
b1=M(:,Nx+1)
A1=M(:,1:Nx)
x=zeros(1,5)
for i=Nx:-1:1
    x(i)=(b1(i)-A1(i,:)*x')/A1(i,i);
end
erro=A*x'-b
printf("x =")
disp(x)
printf("erro =")
disp(max(abs(erro)))

```

O resultado obtido como solução do sistema foi (1 -1 3 4 0), com erro de 3,553D-15, e o tempo médio de execução foi de 0,03089798 segundos.

b) VCN:

Figura 2 - Resolução do Sistema a pelo método da Eliminação Gaussiana com pivotamento parcial.

VCN - Formato Numérico Geral com precisão de 19 casas decimais. 01:27:17

Fonte: Elaboração da autora com o software VCN.

O resultado obtido como solução do sistema foi (1 -1 3 4 0), com erro de 3,553D-15.

4.2.3 Resolução do Sistema a com o Método de Gauss-Jacobi.

Atribuído como chute inicial de solução o vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, e indicada tolerância de $3 \cdot 10^{-15}$

(que foi o resíduo obtido na resolução da matriz a pelo método da Eliminação Gaussiana).

a) Scilab: O seguinte código para resolução foi adaptado de Justo *et al.* (2018).

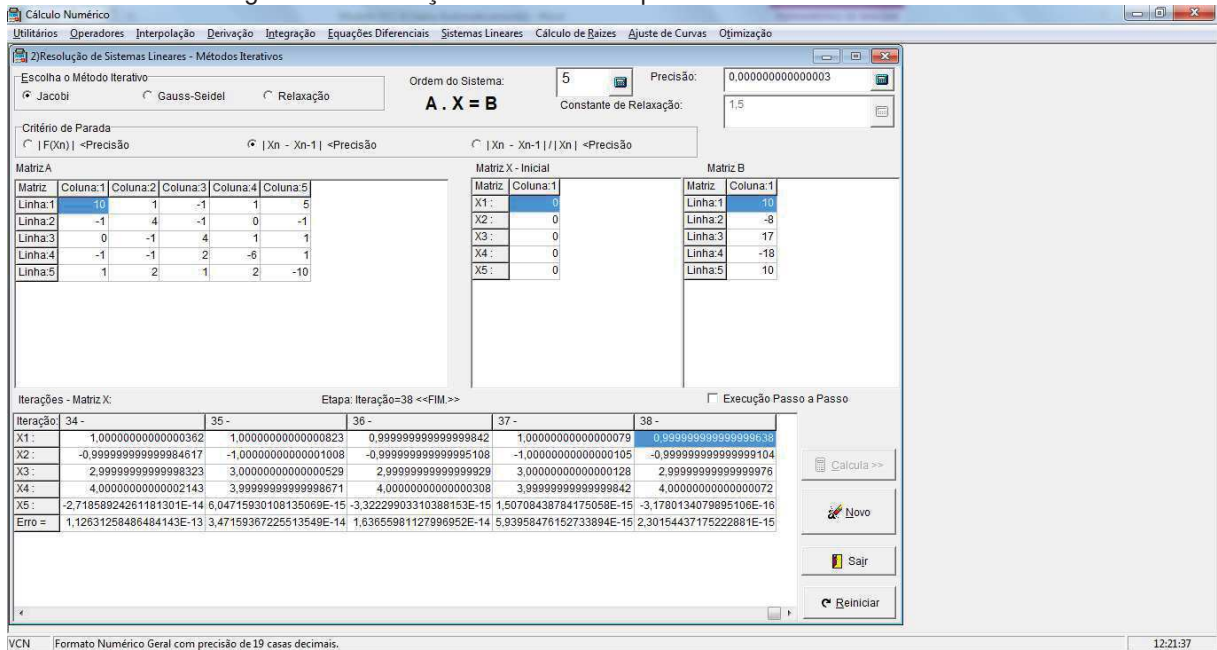
```
A = [10 1 -1 1 5; -1 4 -1 0 01; 0 -1 4 1 1; -1 -1 2 -6 1; 1 2 1 2 -10 ]
b=[10; -8; 17; -18; 10]
tol=3*10^-15
x=[1;1;1;1;1]
N=100
function [k, x, deltax]=jacobi(A, b, x, tol, N)
n=size(A,1)
xnew =x
convergiu=%F
k=1
while k<=N & ~convergiu
xnew(1)=(b(1) - A(1,2:n)*x(2:n))/A(1,1)
for i=2:n-1
xnew(i)=(b(i) -A(i,1:i-1)*x(1:i-1) ...
-A(i,i+1:n)*x(i+1:n) )/A(i,i)
end
xnew(n)= (b(n) -A(n,1:n-1)*x(1:n-1) )/A(n,n)

deltax=max( abs(x-xnew) )
if deltax<tol then
convergiu=%T
end
k=k+1
x=xnew
//disp([k,x',deltax])
end
if ~convergiu then
error('Nao convergiu')
end
endfunction
[k,x,deltax]=jacobi(A,b,x,tol,N)
printf("x=")
disp(x)
printf("erro=")
disp(deltax)
printf("Número de iterações =")
disp(k)
```

O resultado obtido como solução do sistema foi (1 -1 3 4 5,329D-16), com erro 2,665D-15, e o tempo médio de execução foi de 0,01032022 segundos.

b) VCN:

Figura 3 - Resolução do Sistema α pelo Método de Gauss-Jacobi:



Fonte: Elaboração da autora com o software VCN.

O resultado obtido como solução do sistema foi (0,99999999999999638
 -0,99999999999999104 2,9999999999999976 4,0000000000000072
 -3,1780134079895106D-16), com erro de 2,30154437175222881D-15.

4.2.4 Resolução do Sistema α com o método de Gauss-Seidel.

Atribuído como chute inicial de solução o vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, e indicada tolerância de $3 \cdot 10^{-15}$

(que foi o resíduo obtido na resolução da matriz A pelo método da Eliminação Gaussiana).

a) Scilab: O seguinte código para resolução foi adaptado de Justo *et al.* (2018)

```

A=[10 1 -1 1 5; -1 4 -1 0 0; 0 -1 4 1 1; -1 -1 2 -6 1; 1 2 1 2 -10 ]
b=[10; -8; 17; -18; 10]
tol=3*10^-15
x=[1;1;1;1;1]
N=100
function [k, x, deltax]=gauss_seidel(A, b, x, tol, N)
n=size(A,1)
xnew =x
convergiu=%F
k=1
while k<=N & ~convergiu
xnew(1)=(b(1) - A(1,2:n)*x(2:n))/A(1,1)
for i=2:n-1
xnew(i)=(b(i) -A(i,1:i-1)*xnew(1:i-1) ...
-A(i,i+1:n)*x(i+1:n) )/A(i,i)
end
xnew(n)=(b(n) -A(n,1:n-1)*xnew(1:n-1) )/A(n,n)

deltax=max( abs(x-xnew) )
if deltax<=tol then
convergiu=%T
end
k=k+1
x=xnew
// disp([k,x',deltax])
end
if ~convergiu then
error('Nao convergiu')
end

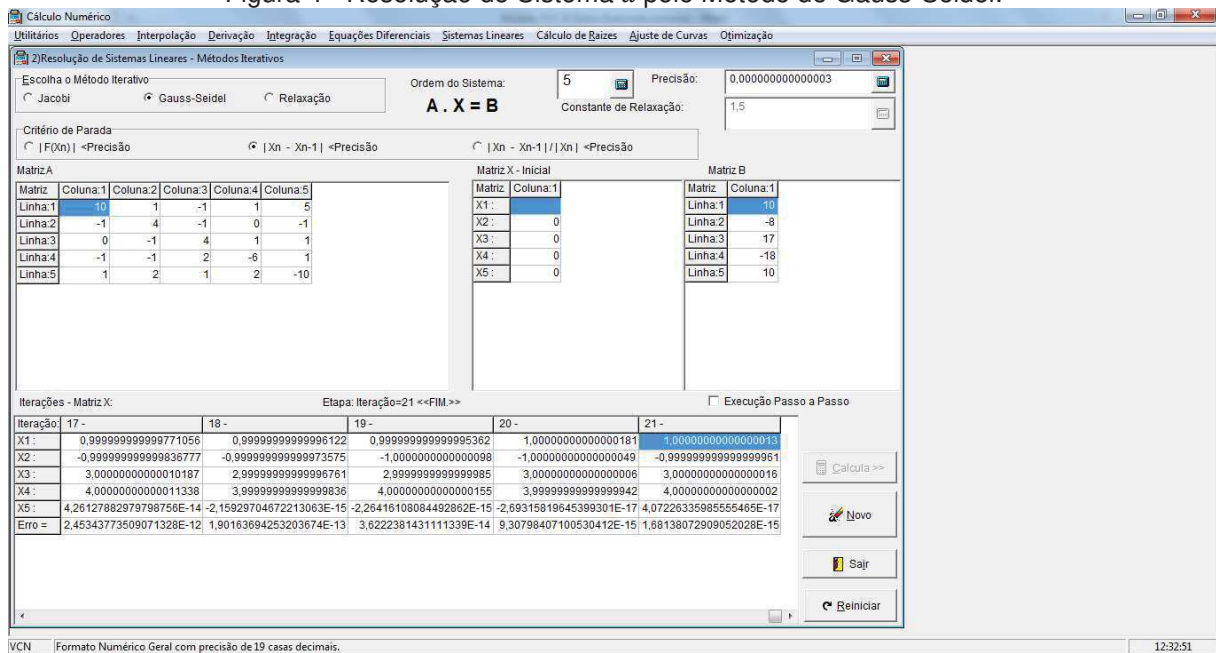
endfunction

[k,x,deltax]=gauss_seidel(A,b,x,tol,N)
printf("x=")
disp(x)
printf("erro=")
disp(deltax)
printf("Número de iterações=")
disp(k)

```

O resultado obtido como solução do sistema foi (1 -1 3 4 0), com erro de 2.331D-15, e o tempo médio de execução foi de 0,01506994 segundos.

b) VCN:

Figura 4 - Resolução do Sistema a pelo Método de Gauss-Seidel:

Fonte: Elaboração da autora com o software VCN.

O resultado obtido como solução do sistema foi $(1,00000000000000013 - 0,99999999999999961 \quad 3,00000000000000016 \quad 4,00000000000000002 \quad 4,07226335985555465D-17)$, com erro de $1,68138072909052028D-15$.

4.3 Sistema b

O sistema b possui 6 equações e 6 variáveis e é dado por

$$b = \begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 - x_6 = -35 \\ 2x_1 + 11x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 55 \\ 2x_1 + 5x_2 - 13x_3 + x_4 - 2x_5 + 2x_6 = 11 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 15x_4 + 2x_5 + x_6 = -73 \\ 8x_1 + x_2 - x_3 - 12x_5 + x_6 = -116 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 - x_5 + 18x_6 = 25 \end{cases}$$

sendo que sua matriz B dos coeficientes é dada por

$$B = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & -5 & 0 & -1 \\ 2 & 11 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -13 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & -15 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & -1 & 0 & -12 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & 3 & -1 & 18 \end{bmatrix}$$

O sistema b tem como solução exata, facilmente verificável, a matriz S_B , dada por

$$S_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculando $\text{cond}(B)$, obtemos 3,6236838, o que implica que o sistema é bem condicionado. De maneira análoga ao Sistema a , o sistema b foi resolvido com os softwares Scilab e VCN com 4 métodos, a saber, eliminação gaussiana sem pivotamento e com pivotamento parcial, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, e foram encontradas as seguintes soluções:

4.3.1 Resolução do sistema b com o método da Eliminação Gaussiana sem pivotamento.

a) Scilab:

O resultado obtido como solução do sistema foi (0 2 -1 6 10 1), com erro de $3,553\text{D-}15$ e o tempo médio de execução foi de 0,0110313 segundos.

b) VCN:

O resultado obtido como solução do sistema foi (0 2 -1 6 10 1), com erro de $3,553\text{D-}15$.

4.3.2 Resolução do sistema b com o método da Eliminação Gaussiana com pivotamento parcial.

a) Scilab:

O resultado obtido como solução do sistema foi (0 2 -1 6 10 1), com erro de $3,553\text{D-}15$ e o tempo médio de execução foi de 0,0350489 segundos.

b) VCN:

O resultado obtido como solução do sistema foi (0 2 -1 6 10 1), com erro de $3,553\text{D-}15$.

4.3.3 Resolução do sistema b com o Método de Gauss-Jacobi.

a) Scilab:

O resultado obtido como solução do sistema foi (0 2 -1 6 10 1), com erro de $4,4416\text{D-}16$ e o tempo médio de execução foi de 0,01926282 segundos.

b) VCN:

O resultado obtido como solução do sistema foi (-5,22786024539922956D-16 2,00000000000000059 -0,99999999999999782 5,999999999999995 9,9999999999999914 0,99999999999999719), com erro de $8,17054757185076142\text{D-}16$.

4.3.4 Resolução do sistema b com o Método de Gauss-Seidel.

a) Scilab:

O resultado obtido como solução do sistema foi (0 2 -1 6 10 1), com erro de 7,105D-16 e o tempo médio de execução foi de 0,0148195 segundos.

b) VCN:

O resultado obtido como solução do sistema foi (-3,33489746234816309D-16 2,00000000000000022 -0,99999999999999938 5,9999999999999981 9,9999999999999977 0,99999999999999959), com erro de 7,98205902416415647D-16.

4.4 Sistema c

O sistema c possui 7 equações e 7 incógnitas e é dado por

$$c = \begin{cases} 1000x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 12 \\ x_1 + 10x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 21 \\ x_1 - 200x_3 + x_4 + 2x_6 = -599 \\ -2x_1 + x_2 + 500x_4 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 = -482 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_4 - 500x_5 + 4x_6 = -1993 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 + 110000x_6 = 220024 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 8x_5 + 1x_6 + 10000x_7 = 30040 \end{cases},$$

sendo que sua matriz dos coeficientes é dada por

$$C = \begin{bmatrix} 1000 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -200 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 500 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & -500 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 3 & 110000 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 4 & 8 & 1 & 10000 \end{bmatrix}.$$

O sistema c tem como solução exata, facilmente verificável, a matriz S_C , dada por

$$S_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Calculando $\text{cond}(C)$, obtemos 10999,377, o que implica que o sistema é mal condicionado. De maneira análoga aos Sistemas a e b , o sistema c foi resolvido com os softwares Scilab e VCN com os 4 métodos, a saber, Eliminação Gaussiana sem pivotamento e com pivotamento parcial, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, e foram encontradas as seguintes soluções:

4.4.1 Resolução do sistema c com o método da Eliminação Gaussiana sem pivotamento.

a) Scilab:

O resultado obtido como solução do sistema foi $(0 \ 1 \ 3 \ -1 \ 4 \ 2 \ 3)$, com erro de $3,638D-12$ e o tempo médio de execução foi de $0,00428148$ segundos.

b) VCN:

O resultado obtido como solução do sistema foi $(-2,16840434497100887D-22 \ 1 \ 3 \ -1 \ 4 \ 2 \ 3)$, com erro de $3,638D-12$.

4.4.2 Resolução do sistema c com o método da Eliminação Gaussiana com pivotamento parcial.

a) Scilab:

O resultado obtido como solução do sistema foi $(0 \ 1 \ 3 \ -1 \ 4 \ 2 \ 3)$, com erro de $3,638D-12$ e o tempo médio de execução foi de $0,00307874$ segundos.

b) VCN:

O resultado obtido como solução do sistema foi $(-2,16840434497100887D-22 \ 1 \ 3 \ -1 \ 4 \ 2 \ 3)$, com erro de $3,638D-12$.

4.4.3 Resolução do sistema c com o Método de Gauss-Jacobi.

a) Scilab:

O resultado obtido como solução do sistema foi $(-7,283D-17 \ 1 \ 3 \ -1 \ 4 \ 2 \ 3)$, com erro $5,151D-14$ e o tempo médio de execução foi de $0,007127$ segundos.

b) VCN:

O resultado obtido como solução do sistema foi $(-2,37073815440025371D-16 \ 0,999999999999993379 \ 2,999999999999998 \ -1,00000000000000056 \ 4,0000000000000005 \ 1,999999999999999 \ 2,9999999999999992)$, com erro de $1,61271928970918577D-13$.

4.4.4 Resolução do sistema c com o Método de Gauss-Seidel.

a) Scilab:

O resultado obtido como solução do sistema foi $(6,573D-17 \ 1 \ 3 \ -1 \ 4 \ 2 \ 3)$, com erro $6,639D-14$ e o tempo médio de execução foi de $0,046581$ segundos.

b) VCN:

O resultado obtido como solução do sistema foi $(1,25640383513703213D-16 \ 0,99999999999999802 \ 3 \ -0,9999999999999998 \ 4 \ 2 \ 3)$, com erro de $1,27299809148800902D-13$.

4.5 Sistema d

O sistema d possui 3 equações e 3 incógnitas e é dado por

$$d = \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases},$$

sendo que sua matriz dos coeficientes é dada por

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

O sistema d tem como solução exata, facilmente verificável, a matriz S_D , dada por

$$S_D = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calculando $\text{cond}(D)$, obtemos 36.880941, o que implica que o sistema é mal condicionado. De maneira análoga aos Sistemas a , b e c , o sistema d foi resolvido com os softwares Scilab e VCN com os 4 métodos, a saber, Eliminação Gaussiana sem pivotamento e com pivotamento parcial, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, e foram encontradas as seguintes soluções:

4.5.1 Resolução do sistema d com o método da Eliminação Gaussiana sem pivotamento.

a) Scilab:

O resultado obtido como solução do sistema foi (4 0 -1), com erro 0 e tempo médio de execução foi de 0,002516166 segundos.

b) VCN:

O resultado obtido como solução do sistema foi (4 0 -1), com erro 0.

4.5.2 Resolução do sistema d com o método da Eliminação Gaussiana com pivotamento parcial.

a) Scilab:

O resultado obtido como solução do sistema foi (4 0 -1), com erro 0 e o tempo médio de execução foi de 0,0128367 segundos.

b) VCN:

O resultado obtido como solução do sistema foi (4 0 -1), com erro 0.

4.5.3 Resolução do sistema d com o Método de Gauss-Jacobi.

a) Scilab:

O sistema não convergiu para uma solução.

b) VCN:

O sistema não convergiu para uma solução.

4.5.4 Resolução do sistema d com o Método de Gauss-Seidel.

a) Scilab:

O sistema não convergiu para uma solução.

b) VCN:

O sistema não convergiu para uma solução.

4.6 Sistema e

O sistema e possui 3 equações e 3 incógnitas e é dado por

$$e = \begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$$

sendo que sua matriz dos coeficientes é dada por

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema e tem como solução exata, facilmente verificável, a matriz S_E , dada por

$$S_E = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Calculando $\text{cond}(E)$, obtemos 5,2869055, o que implica que o sistema é bem condicionado. De maneira análoga aos Sistemas a , b , c e d , o sistema e foi resolvido com os softwares Scilab e VCN com os 4 métodos, a saber, Eliminação Gaussiana sem pivotamento e com pivotamento parcial, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, e foram encontradas as seguintes soluções:

4.6.1 Resolução do sistema e com o método da Eliminação Gaussiana sem pivotamento.

a) Scilab:

Não foi possível obter uma solução para o sistema.

b) VCN:

Não foi possível obter uma solução para o sistema.

4.6.2 Resolução do sistema e com o método da Eliminação Gaussiana com pivotamento parcial.

a) Scilab:

O resultado obtido como solução do sistema foi $(1 \ -1 \ 4)$, com erro de $4,441D-16$ e o tempo médio de execução foi de $0,005111$ segundos.

b) VCN:

O resultado obtido como solução do sistema foi $(1 \ -1 \ 4)$, com erro 0 .

4.6.3 Resolução do sistema e com o Método de Gauss-Jacobi.

a) Scilab:

O sistema não convergiu para uma solução.

b) VCN:

O sistema não convergiu para uma solução.

4.6.4 Resolução do sistema e com o Método de Gauss-Seidel.

a) Scilab:

O sistema não convergiu para uma solução.

b) VCN:

O sistema não convergiu para uma solução.

5 Resultados e Discussões

As tabelas 1, 2, 3 e 4 contêm o resumo dos dados obtidos na resolução dos sistemas lineares dos exemplos 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 e 4.9, respectivamente, pelos softwares Scilab e VCN. Os métodos utilizados foram:

- 1 – Eliminação Gaussiana sem pivotamento;
- 2 – Eliminação Gaussiana com pivotamento parcial;
- 3 – Método de Gauss-Jacobi;
- 4 – Método de Gauss-Seidel.

Tabela 1 – Comparação dos Métodos Numéricos para a resolução do Sistema *a*.

Método	Scilab			VCN	
	Tempo (seg.)	Erro	Solução	Erro	Solução
1	0,00336384	3,553D-15	1 -1 3 4 0	3,553D-15	1 -1 3 4 0
2	0,0389798	3,553D-15	1 -1 3 4 0	3,553D-15	1 -1 3 4 0
3	0,01032022	2,665D-15	1 -1 3 4 5,329D-16	2,30154437175222881E-15	0,999999999999999638 -0,999999999999999104 2,99999999999999976 4,000000000000000072 -3,1780134079895106E-16
4	0,01506994	2,331D-15	1 -1 3 4 0	1,68138072909052028E-15	1,000000000000000013 -0,999999999999999961 3,000000000000000016 4,000000000000000002 4,07226335985555465E-17

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 2 – Comparação dos Métodos Numéricos para a resolução do Sistema *b*.

Método	Scilab			VCN	
	Tempo (seg.)	Erro	Solução	Erro	Solução
1	0,0110313	3,553D-15	0	3,553D-15	0
			2		2
			-1		-1
			6		6
			10		10
			1		1
2	0,0350489	3,553D-15	0	3,553D-15	0
			2		2
			-1		-1
			6		6
			10		10
			1		1
3	0,01926282	4,4416D-16	0	8,17054757185076142E-16	-5,22786024539922956E-16
			2		2,00000000000000059
			-1		-0,99999999999999782
			6		5,999999999999995
			10		9,9999999999999914
			1		0,99999999999999719
4	0,0148195	7,105D-16	0	7,98205902416415647E-16	-3,33489746234816309E-16
			2		2,00000000000000022 -
			-1		0,99999999999999938
			6		5,9999999999999981
			10		9,9999999999999977
			1		0,9999999999999959

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 3 – Comparação dos Métodos Numéricos para a resolução do Sistema *c*.

Método	Scilab			VCN	
	Tempo (seg.)	Erro	Solução	Erro	Solução
1	0,00428148	3,638D-12	0	3,638D-12	-2,16840434497100887E-22
			1		
			3		
			-1		
			4		
			2		
3					
2	0,00307874	3,638D-12	0	3,638D-12	-2,16840434497100887E-22
			1		
			3		
			-1		
			4		
			2		
3					
3	0,007127	5,151D-14	-7,283D-17	1,61271928970918577E-13	-2,37073815440025371E-16
			1		
			3		
			-1		
			4		
			2		
3					
4	0,046581	6,639D-14	6,573D-17	1,27299809148800902E-13	1,25640383513703213E-16
			1		
			3		
			-1		
			4		
			2		
3					

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 4 – Comparação dos Métodos Numéricos para a resolução do Sistema *d*.

Método	Scilab			VCN	
	Tempo (seg.)	Erro	Solução	Erro	Solução
1	0,002516166	0	4	0	4
			0		0
			-1		-1
2	0,0128367	0	4	0	4
			0		0
			-1		-1
3	0,0032583	0	4	-	-
			0		0
			-1		-1
4	-	-	-	-	-

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 5 – Comparação dos Métodos Numéricos para a resolução do Sistema *e*.

Método	Scilab			VCN		
	Tempo (seg.)	Erro	Solução	Tempo (seg.)	Erro	Solução
1	-	-	-	-	-	-
2	0,005111	4,441D-16	1 -1 4	-	0	1 -1 4
3	-	-	-	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-

Fonte: Dados da pesquisa.

Os critérios analisados, a partir da resolução de cada sistema pelos 4 métodos numéricos foram:

- i. o tempo que o software Scilab demorou para calcular a solução (como o VCN não computa o tempo, não foi possível comparar essa informação entre os softwares, apenas entre as resoluções dos métodos no VCN);
- ii. o erro obtido na solução, calculado por ambos softwares como o resíduo da solução aproximada;
- iii. o vetor solução.

Analisando a Tabela 1, na qual constam os valores referentes ao Sistema *a*, podemos constatar que, em relação ao tempo de processamento do cálculo, o método da Eliminação Gaussiana sem pivotamento apresentou menor resultado. Em relação ao erro da solução, por estar sendo considerado o resíduo da matriz, esse mostrou-se elevado, em comparação ao dos métodos iterativos; no entanto, devido à ordem do erro ser de 10^{-15} , pode-se considerar essa diferença insignificante. A solução convergiu em todos os métodos.

Na Tabela 2, são apresentados os valores referentes ao Sistema *b*. de maneira análoga ao sistema *a*, o método da Eliminação Gaussiana sem pivotamento apresentou um tempo menor do que os demais métodos, enquanto os métodos iterativos apresentaram menor valor de erro, embora ainda da ordem de 10^{-16} em comparação a 10^{-15} , o que são diferenças que podem ser consideradas insignificantes. Todos os métodos convergiram para a solução do sistema.

Na Tabela 3, referente ao sistema *c*, temos que o método de Eliminação Gaussiana com pivotamento parcial apresentou menor tempo para resolução, enquanto os métodos iterativos apresentaram menor erro na solução do sistema, embora também a ordem de 10^{-12} e 10^{-13} possa não significar uma diferença a ser considerada. Ocorreu convergência da solução para os quatro métodos analisados.

Analisando a Tabela 4, a resolução do Sistema *d* com o método da Eliminação Gaussiana sem pivotamento decorreu em menor tempo, e não gerou resíduo como erro da solução. O método de Gauss-Jacobi apresentou solução no Scilab, porém, no VCN, não

atendeu a teste de convergência, enquanto o método de Gauss Seidel não atendeu ao respectivo teste de convergência e não gerou resolução para o sistema.

Por fim, a Tabela 5 expõe a resolução do Sistema e , na qual o método da Eliminação Gaussiana sem pivotamento não apresentou resultado, devido ao elemento pivô a_{11} ser nulo, ocasionou uma divisão por zero. Ademais, os métodos iterativos não atenderam aos testes de convergência, e não calcularam a solução do sistema. Entretanto, o método da Eliminação Gaussiana com pivotamento parcial apresentou a única solução, dentre os métodos comparados.

Após analisar os resultados dos testes, é possível relacioná-los com a literatura, e fazer algumas considerações a respeito. Chapra e Canale (2008) ressaltam que o tempo de execução do método da Eliminação Gaussiana depende da quantidade de *flops*, ou seja, a quantidade de operações envolvidas na resolução do sistema, no caso, $\frac{2n^3}{3}$. Comparando os tempos obtidos nos testes, se o tempo de processamento e os *flops* são relacionados, então o Método de Eliminação Gaussiana, cujo tempo foi inferior aos demais, realiza menor quantidade de operações para a resolução de um sistema.

O fato de os métodos iterativos apresentarem menor erro de resolução está relacionado ao processo de iteração dos mesmos, uma vez que o valor utilizado como tolerância nos métodos iterativos foi o resíduo (aqui considerado como erro) dado na resolução dos métodos diretos. Em contrapartida, Chapra e Canale (2008) afirmam que o método de Gauss-Seidel, assim como o método de Gauss-Jacobi, nem sempre converge, ou, em alguns casos, converge lentamente para a solução verdadeira.

Assim, conclui-se que o método de Eliminação Gaussiana é, em geral, mais eficiente para que se obtenha a solução de sistemas lineares. Contudo, o método da Eliminação Gaussiana sem pivotamento pode não apresentar solução, como no exemplo 4.9, em que o elemento pivô da matriz era igual a zero. Desse fato, a fim de evitar erros semelhantes, uma alternativa é utilizar o método com pivotamento parcial. Chapra e Canale (2008) cita os benefícios da utilização dessa variação do método, como minimizar erros de arredondamento e de mal condicionamento, abrangendo maior quantidade de sistemas.

6 Considerações Finais

Ao finalizar esse trabalho, conclui-se que, com base nas bibliografias que mencionam e caracterizam os métodos numéricos, de fato, o método da Eliminação Gaussiana é eficiente para a resolução de sistemas lineares de um modo geral. O levantamento bibliográfico indicou que os métodos da Eliminação Gaussiana, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel se destacam, quando se trabalha com sistemas lineares de um modo geral, em comparação com outros métodos, devido à quantidade de operações (*flops*) e maior abrangência na aplicabilidade.

Além disso, os sistemas elaborados sugerem que o método da Eliminação Gaussiana com pivotamento parcial é o mais efetivo e eficiente, dentre os quatro métodos analisados, Eliminação Gaussiana sem e com pivotamento parcial, Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. Destaca-se que o mesmo foi o único capaz de resolver os cinco sistemas, sempre apresentando resultados satisfatórios.

Mesmo assim, os demais métodos são importantes para o cálculo numérico, possuindo diferentes aspectos de aplicação em relação aos outros, conforme as características do sistema que se pretende resolver. Além disso, os métodos indiretos podem convergir para a solução do sistema com um erro ainda inferior ao da Eliminação Gaussiana, caso a ordem de magnitude do erro seja um fator relevante para a aplicação. A resolução dos exemplos proporcionou a verificação de tais fatos, utilizando sistemas bem e mal condicionados.

Logo, a relevância dada ao método da Eliminação Gaussiana nas bibliografias de Álgebra Linear é devida à sua eficiência computacional, e sua aplicabilidade do ponto de vista numérico.

A realização do trabalho foi de grande contribuição para a formação acadêmica, uma vez que possibilitou um aprofundamento acerca dos métodos numéricos para a resolução de sistemas lineares, conteúdo trabalhado em alguns momentos do curso de Licenciatura em Matemática. Além disso, com a utilização do software Scilab, o qual esteve presente na graduação nas disciplinas de Álgebra Linear I e Matemática Computacional, foi possível aplicar essa ferramenta de maneira prática, confirmando sua relevância na área da Matemática.

REFERÊNCIAS

- ANDRETTA, M. **Resolução de sistemas de equações lineares: Método da Eliminação de Gauss – estratégias de pivotamento**. São Paulo: 2012. Disponível em: <<http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andretta/ensino/aulas/sme0500-1-12/pivotamento.pdf>>. Acesso em: 05 nov. 2018.
- ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- ASCENCIO, A. F. G.; CAMPOS, E. A. V. **Fundamentos da Programação de Computadores**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.
- BALBO, A. R.; FUJII, C. K.; LOCCI, V.; VASCONCELLOS, L. A. S. **Cálculo Numérico Computacional: teoria, métodos numéricos, implementação computacional e programação orientada a objetos**. São Paulo, [200-]. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/~arbalbo/Iniciacao_Cientifica/sistemaslineares/teoria/5_Met_Gauss_Seidel.pdf>. Acesso em: 05 nov. 2018.
- BORTOLI, A. L.; CARDOSO, C.; FACHIN, M. P. G.; CUNHA, R. D. **Introdução do Cálculo Numérico**. 2. ed. Porto Alegre: UFRGS, 2003. Disponível em: <<https://chasqueweb.ufrgs.br/~djusto/num/index.html>>. Acesso em: 05 nov. 2018.
- CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6. ed. rev. São Paulo: Atual, 1993.
- CARL Friedrich Gauss. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss>. Acesso em: 5 nov. 2018.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos numéricos para engenharia**. 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.
- CHENG, B. **Math 471 (Numerical methods)**. 2010. Disponível em: <http://personal.maths.surrey.ac.uk/bc0012/teaching/Math471Su2010/Math471Su2010_section3.5--3.8.pdf>. Acesso em: 05 nov. 2018.
- DATTA, B. N. **Numerical Linear Algebra and Applications**. 2. ed. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1989.
- ECKHARD, D. **Notas de Aula - MAP0202**. 2016. Disponível em: <https://mail-attachment.googleusercontent.com/attachment/u/1/?ui=2&ik=a43889698a&attid=0.1&permmsgid=msg-f:1614899361391943419&th=16694669bfc59efb&view=att&disp=inline&realattid=f_jni8n16g0&sadnir=2&saddbat=ANGjdJ_Alltru0BI7VMBEsTcD4mpx8i3mv2iKj-QF3tECMwa5ANz71ffM9MffWXMovG3kBgQk4a0UE4TVBUhzN8DFcRTQT4u-d3kovjhOeWkLbMurdIFuuOtsX7W_wAjPwuhANHIQmaJFsWRFc5yrllKogxWoum05ckGDdO7xIGYit8M8Vu9vb4vch0-BJ4zWHhiQSI4dQ173a8pczlpFbfcGbm9Qpk9ivdvDqjqZxdN1KNdsR9AZlvRwA3rtRf3B6-cMoQVVII_5v1qX-z0WLItrbLWYFAhLOZCbDv-vNV39rzquq76GukJEt5EXx6yWLDrsqbosUfBmh775eAqNoYI6UYa0kxXBL-fJV540eAd2dhXBU_76jzrnJvGGArJjVv1DoLuGR_m6YnJ6blnJtwLxTdff2GV_ge8bc8ej6zxWWM0AmGIUQVdmSRLdDZydrBjaa3_4OXI6KIYzEzroBqb74RLa176vc9ZQ1vCjUNYwpCY>

[S1MjU8fJbMVcQyWwu1zVYJUUpQEcxOGps1nmmse3CGOGmpFOUaz5QLm8tCf6PLd5zcw2oWs_ZBtbLMKvbd3K4EwCa89byIA_pGdrpnr-uTWQQIho5zmMUqUYUcalXBmHkiWhGqt8O7SlkQ5gedyhSJcLFZ1ET7m8pF](https://www.researchgate.net/publication/320173715_SOFTWARES_DIDATICOS_GRATUITOS_E_DE_CODIGO_ABERTO_FERRAMENTAS_PARA_POTENCIALIZAR_O_ENSINO_DAS_ENGENHARIAS/links/59d2cb0faca2721f4369b92b/SOFTWARES-DIDATICOS-GRATUITOS-E-DE-CODIGO-ABERTO-FERRAMENTAS-PARA-POTENCIALIZAR-O-ENSINO-DAS-ENGENHARIAS.pdf)>. Acesso em: 5 nov. 2018.

FRANKLIN, Joel N. **Matrix theory**. Courier Corporation, 2012.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. **Matrix Computations**. 4. ed. Baltimore, Johns Hopkins University, 2013.

JAMES Joseph Sylvester. In: Wikipédia: a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/James_Joseph_Sylvester>. Acesso em: 5 nov. 2018.

JUSTO, D. A. R.; SAUTER, E.; AZEVEDO, F. S.; GUIDI, L. F.; KONZEN, P. H. A. **Cálculo numérico**: um livro colaborativo Versão Scilab. Porto Alegre: 2018. Disponível em: <<https://www.ufrgs.br/reatmat/CalculoNumerico/livro-sci/main.html>>. Acesso em: 05 nov. 2018.

LAY, D. C. **Álgebra linear e suas aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

LIMA, T. C. S.; MIOTO, R. C. T. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katálysis**. Florianópolis, v. 10, 2007, p. 37-45. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rk/v10nspe/a0410spe.pdf>>. Acesso em: 01 maio 2018.

RENFRO, M. **Cramer's Rule and Gauss Elimination**. 2004. Disponível em: <https://www.cae.tntech.edu/Members/renfro/me2000/lectures/2004-09-28_handouts.pdf>. Acesso em: 5 nov. 2018.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

SCILAB ENTERPRISES. **Scilab**: Sobre o Scilab. 2017. Disponível em: <<https://www.scilab.org/en/scilab/about>>. Acesso em: 04 nov. 2018.

SILVA, V. C.; OLIVEIRA, W. S. Softwares didáticos gratuitos e de código aberto: ferramentas para potencializar o ensino das engenharias. In: XLV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia – COBENGE 2017. Joinville: 2017. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Vinicius_Marinho_Silva/publication/320173715_SOFTWARES_DIDATICOS_GRATUITOS_E_DE_CODIGO_ABERTO_FERRAMENTAS_PARA_POTENCIALIZAR_O_ENSINO_DAS_ENGENHARIAS/links/59d2cb0faca2721f4369b92b/SOFTWARES-DIDATICOS-GRATUITOS-E-DE-CODIGO-ABERTO-FERRAMENTAS-PARA-POTENCIALIZAR-O-ENSINO-DAS-ENGENHARIAS.pdf>. Acesso em: 28 set. 2018.