INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO GRANDE DO SUL
***CAMPUS* CAXIAS DO SUL**

NÚMEROS COMPLEXOS, POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS: UMA EXPLORAÇÃO METODOLÓGICA DE ENSINO HÍBRIDO COM A PLATAFORMA EDUCACIONAL *KHAN ACADEMY*

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDUARDO BOFF RIBEIRO

CAXIAS DO SUL
2017

EDUARDO BOFF RIBEIRO

NÚMEROS COMPLEXOS, POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS: UMA EXPLORAÇÃO METODOLÓGICA DE ENSINO HÍBRIDO COM A PLATAFORMA EDUCACIONAL *KHAN ACADEMY*

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – *Campus* Caxias do Sul.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Greice da Silva Lorenzzetti Andreis – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – *Campus* Caxias do Sul.

CAXIAS DO SUL

2017

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Caxias do Sul

51 Ribeiro, Eduardo Boff
B669n Números complexos, polinômios e equações polinomiais : uma exploração metodológica de ensino híbrido com a plataforma educacional khan academy [manuscrito] / Eduardo Boff Ribeiro; Orientadora, Greice da Silva Lorenzzetti Andreis. -- Caxias do Sul, RS : 2017.
136 f., : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Caxias do Sul. Graduação em Matemática.

Inclui referências
Inclui apêndice

1. Licenciatura em matemática. 2. Tecnologias digitais. 3. Números complexos. 4. Polinômios. 5. Equações polinomiais. 6. Khan Academy. I. Andreis, Greice da Silva Lorenzzetti. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul. Graduação em Matemática. III. Título.

CDU 51

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Jaçanã Eggres Pando CRB 10/1936

EDUARDO BOFF RIBEIRO

NÚMEROS COMPLEXOS, POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS: UMA EXPLORAÇÃO METODOLÓGICA DE ENSINO HÍBRIDO COM A PLATAFORMA EDUCACIONAL *KHAN ACADEMY*

A banca examinadora, abaixo listada, aprova o Trabalho de Conclusão de Curso "Números complexos, polinômios e equações polinomiais: uma exploração metodológica de ensino híbrido com a plataforma educacional *Khan Academy*" elaborado por Eduardo Boff Ribeiro como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – *Campus* Caxias do Sul.

Prof. Me. César Bublitz – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus* Caxias do Sul.

Profa. Ma. Sabrina Arsego Miotto – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus* Caxias do Sul.

Prof. Dr. Rodrigo Sychocki da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Instituto de Matemática e Estatística (IME).

Caxias do Sul, 21 de novembro de 2017.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelas oportunidades e aprendizagens durante minha vida.

Agradeço imensamente à minha orientadora, Professora Greice da Silva Lorenzzetti Andreis, pelos momentos de apoio, aprendizagem e discussão para a realização deste trabalho e para minha vida.

Agradeço à minha família, principalmente aos meus pais José e Suzana, por todo o apoio dado a mim na concretização do sonho de me tornar professor de Matemática, e por toda a educação que recebi deles. Às minhas irmãs, Elaine e Josiane, por todo o incentivo.

Agradeço a todos os envolvidos nessa pesquisa, em especial aos alunos do 3º ano do turno da manhã do IFRS, *Campus* Caxias do Sul, pela colaboração e contribuição com esta pesquisa.

Por fim, agradeço a meus amigos e professores que me apoiaram durante a construção deste trabalho.

RESUMO

Esta pesquisa teve por finalidade a criação e a execução de uma prática de ensino sobre números complexos, polinômios e equações polinomiais, por meio do uso da plataforma educacional *Khan Academy*, propondo o exercício reflexivo sobre a aprendizagem dos estudantes participantes desses conteúdos por meio do uso de tecnologias digitais. A pesquisa foi desenvolvida com duas turmas do 3º ano do Ensino Médio Integrado do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), *Campus* Caxias do Sul. Como metodologia de pesquisa utilizou-se a investigação exploratória e o estudo de caso. Esta pesquisa teve como perguntas norteadoras "Como utilizar a plataforma educacional *Khan Academy* no ensino de números complexos, polinômios e equações polinomiais no Ensino Médio?" e "Como utilizar esta plataforma como um instrumento de avaliação a fim de inferir sobre a aprendizagem dos estudantes?". Exploraram-se as ferramentas que a plataforma oferece e buscou-se elaborar planos de aula que as envolvessem. O trabalho propõe um ensino híbrido por meio do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação. Com os resultados da pesquisa, constatou-se que é possível abordar os temas propostos através de uma prática de ensino envolvendo as tecnologias digitais. A prática de ensino desenvolvida auxiliou os estudantes no entendimento do conteúdo de uma forma diferenciada, pois, além de listas de exercícios em sala de aula, tiveram a oportunidade de trabalhar na plataforma com vídeos e testes com animação, o que acabou por envolvê-los no desenvolvimento das atividades. Além disso, a plataforma se apresenta como um rico instrumento para o professor em função dos relatórios que podem ser gerados com a finalidade de acompanhar o desenvolvimento dos estudantes.

Palavras-chave: *Khan Academy*. Tecnologias Digitais. Números Complexos. Polinômios. Equações Polinomiais.

ABSTRACT

This research aimed to create and implement a teaching practice about complex numbers, polynomials and polynomial equations through the use of *Khan Academy*. It also looked for reflections about students' apprenticeship in these contents, by using digital technologies. This work has been developed by students of two classes from the senior year of a High School in Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, in Caxias do Sul. The method of research used in the present study was the exploratory one. This paper was orientaded by a leading question: "How to use the *Khan Academy* to teach complex numbers, polynomials e polynomial equations in High School?" and also, "How to use it to evaluate students, in order to take notes on the students' learning process?". Therefore, the tools offered by this digital platform were scanned, creating lesson plans that would use this platform. Hence, this study worked towards a hybrid education, concerning the use of Information and Comunication Technologies (ICDs). The result of the research was that it is possible to employ the teaching of the subjects featured in this study, regarding the ICDs. Thus, the teaching practice developed here helped students to understand the subject in a new way, since they had the opportunity to work with the platform, by watching videos and animated try outs. This possibility involved the students to develop the activities. Moreover, the *Khan Academy* platform was also a rich tool to teachers, due to its reports, generated in order to help them keep track of their students' progress.

Keywords: *Khan Academy*. Digital Technologies. Complex Numbers. Polynomials. Polynomial Equations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Página inicial. 26
Figura 2 – Assuntos. 26
Figura 3 – Cadastre-se. 27
Figura 4 – Página inicial: perfil estudante. 28
Figura 5 – Progresso: habilidades. 29
Figura 6 – Progresso: vídeos. 29
Figura 7 – Progresso: atividades. 30
Figura 8 – Informações dos gráficos de “Atividade”. 30
Figura 9 – Progresso: foco. 31
Figura 10 – Informações de uma das atividades em Progresso>Foco. 31
Figura 11 – Progresso: recomendações do tutor. 32
Figura 12 – Projetos construídos na plataforma *Khan Academy* por seus usuários. 32
Figura 13 – Adicionando professor/pai/tutor. 33
Figura 14 – Informações no nome do usuário. 33
Figura 15 – Tópicos abordados sobre números imaginários e complexos em “Pré-Cálculo”. 34
Figura 16 – Página inicial de Pré-Cálculo. 34
Figura 17 – Tópico sobre números imaginários e complexos. 35
Figura 18 – Soma e subtração de números complexos. 36
Figura 19 – Exemplo de vídeo disponível na plataforma *Khan Academy*. 36
Figura 20 – Exemplo de atividade em “Praticar”. 37
Figura 21 – Verificando o exercício de soma e subtração de complexos. 38
Figura 22 – Resultado ao finalizar uma atividade. 38
Figura 23 – Página da missão de Pré-Cálculo. 39
Figura 24 – Desafio da seção de Pré-Cálculo. 40
Figura 25 – Verificando a atividade de desafio em Pré-Cálculo. 40
Figura 26 – Finalizando um desafio. 41
Figura 27 – Recursos para tutores. 42
Figura 28 – Turmas do professor. 42
Figura 29 – Guia para professores em uma turma. 43
Figura 30 – Recomendações da turma. 43
Figura 31 – Recomendações da turma (anterior). 43
Figura 32 – Recomendando 1. 44
Figura 33 – Recomendando 2. 44
Figura 34 – Notificação da recomendação. 45

Figura 35 – Relatório recomendações 1. 45
Figura 36 – Relatório recomendações 2. 45
Figura 37 – Relatório recomendações 3. 46
Figura 38 – Relatório recomendações 4. 46
Figura 39 – Relatório recomendações 5. 47
Figura 40 – Relatório recomendações 6. 48
Figura 41 – Progresso. 48
Figura 42 – Filtro missão. 49
Figura 43 – Tópico: números complexos. 49
Figura 44 – Tópico: números complexos>potências da unidade imaginária..... 50
Figura 45 – Progresso por aluno..... 50
Figura 46 – Sugestões de habilidades como filtro para uma análise..... 51
Figura 47 – Lista de estudantes..... 51
Figura 48 – Recomendação dada a um estudante..... 52
Figura 49 – Gráfico com resumo da tarefa do estudante. 52
Figura 50 – Uso da *Khan Academy* pelos estudantes..... 53
Figura 51 – Configurações..... 54
Figura 52 – Excerto do artigo “O Plano Complexo”..... 63
Figura 53 – Excerto do artigo “Multiplicação de Números Complexos”. 64
Figura 54 – Pré-Cálculo: habilidades (Turma A). 73
Figura 55 – Pré-Cálculo: habilidades (Turma B). 73
Figura 56 – *Khan Academy*: polinômios e equações polinomiais (Turma A). 76
Figura 57 – *Khan Academy*: números complexos 1 (Turma B). 77

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Pré Prova: Turma A. 67
Gráfico 2 – Pré Prova: Turma B. 68
Gráfico 3 – *Khan Academy*: números complexos 1 (Turma A). 69
Gráfico 4 – *Khan Academy*: números complexos 1 (Turma B). 69
Gráfico 5 – *Khan Academy*: números complexos 2 (Turma A). 70
Gráfico 6 – *Khan Academy*: números complexos 2 (Turma B). 70
Gráfico 7 – Nota na prova sobre números complexos (Turma A). 71
Gráfico 8 – Nota na prova sobre números complexos (Turma B). 71
Gráfico 9 – Notas na prova sobre polinômios e equações polinomiais (Turma A). 77
Gráfico 10 – Notas na prova sobre polinômios e equações polinomiais (Turma B). 78
Gráfico 11 – Turmas participantes. 79
Gráfico 12 – Cursos dos estudantes participantes. 79
Gráfico 13 – Realização de atividades na plataforma *Khan Academy*. 79
Gráfico 14 – Uso futuro da plataforma *Khan Academy*. 82
Gráfico 15 – Indicação da *Khan Academy* a outros estudantes. 83
Gráfico 16 – Indicação da *Khan Academy* a professores para uso em sala de aula. 83

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Medalhas. 28
Quadro 2 – Símbolos existentes nos tópicos de cada assunto. 35
Quadro 3 – Relatório recomendação (parte I). 47
Quadro 4 – Relatório recomendação (parte II). 47
Quadro 5 – Planilha eletrônica: progresso por habilidade (exercícios). 55
Quadro 6 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (*Summary*) – Parte I. 55
Quadro 7 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (*Summary*) – Parte II. 55
Quadro 8 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (*Mission-specific*). 56
Quadro 9 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (*Exercises*). 56
Quadro 10 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (Vídeos). 57
Quadro 11 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (*Badges*). 57
Quadro 12 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (*Points*). 57

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13
1.1 Objetivos da pesquisa 15
1.2 Estrutura do trabalho 16
2 TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO EM SALA DE AULA 17
3 A PLATAFORMA EDUCACIONAL *KHAN ACADEMY* 21
3.1 Histórico 21
3.2 Pesquisas sobre a *Khan Academy* 23
3.3 Apresentação da Plataforma *Khan Academy* e Cadastro 25
3.4 Perfil Estudante 27
3.5 Perfil Professor ou Pais 41
4 METODOLOGIA 58
4.1 Metodologia de pesquisa 58
4.2 Procedimentos metodológicos 59
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES 63
5.1 Diário de bordo 1 63
5.2 Diário de bordo 2 65
5.3 Diário de bordo 3 66
5.4 *Khan Academy*: Números Complexos 68
5.5 Prova: números complexos 71
5.5.1 Recuperação paralela da prova sobre números complexos 72
5.5.2 *Khan Academy*: Pré-cálculo – números complexos 72
5.6 Diário de bordo 4 74
5.7 Diário de bordo 5 74
5.8 Diário de bordo 6 75
5.9 *Khan Academy*: polinômios e equações polinOmiais 76
5.10 Prova sobre polinômios e equações polinomiais 77
5.11 Análise das estrevistas realiZadas com os estudantes via formulário eletrônico 78
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 85
REFERÊNCIAS 87

APÊNDICE A – Diário de bordo 1 89
APÊNDICE B – Diário de bordo 2 97
APÊNDICE C – Diário de bordo 3 104
APÊNDICE D – Prova sobre números complexos: Turma A 108
APÊNDICE E – Prova sobre números complexos: Turma B 109
APÊNDICE F – Diário de bordo 4 110
APÊNDICE G – Diário de bordo 5 115
APÊNDICE H – Diário de bordo 6 123
APÊNDICE I – Prova sobre polinômios e equações polinomiais: Turma A 132
APÊNDICE J – Prova sobre polinômios e equações polinomiais: Turma B 133
APÊNDICE K – Entrevista aos estudantes por meio de formulário eletrônico de avaliação 134
APÊNDICE L – Termo de Consentimento Informado – Menor de 18 anos 136
APÊNDICE M – Termo de Consentimento Informado – Maior de 18 anos 137

1 INTRODUÇÃO

A escola é um lugar interativo onde, por vezes, o envolvimento do discente para o estudo origina-se da relação com os colegas por meio de troca de informações. Além disso, é preciso "[...] ter em mente que os alunos do século XXI, alunos nativos digitais, passam a maior parte do tempo em um mundo virtual" (BARROQUEIRO; AMARAL, 2011, p. 126). Neste sentido, Pedroso (2011, p. 13) defende que "[...] as novas tecnologias têm muito a contribuir para o avanço da sociedade, desde que sejam bem empregadas, tanto em empresas, quanto em escolas e até mesmo para o uso pessoal". Assim, esta pesquisa propõe a utilização das tecnologias digitais no ensino da Matemática, por meio da plataforma educacional *Khan Academy*.

A utilização das tecnologias digitais requer cuidados, pois apesar de ser uma forma diferenciada de abordagem dos conteúdos, podem haver dificuldades na sua implantação em práticas pedagógicas. Em um estudo de Rosa (2013, p. 221), uma das dificuldades encontradas é a "[...] falta de domínio no uso das tecnologias por parte dos professores". Desta forma, o conhecimento da ferramenta, bem como o planejamento para seu uso em um determinado contexto, devem preceder a utilização desta tecnologia. Assim, para a utilização de uma tecnologia não é suficiente apenas investigar sobre possibilidades, mas é necessário vivenciá-la e, a partir daí, analisar sua funcionalidade em um determinado contexto. Além disso, o papel do professor deve ser de mediador entre os estudantes e a tecnologia para que, aos poucos, os estudantes adquiram uma maior independência tanto em sua aprendizagem quanto no uso da tecnologia.

Nesta pesquisa utilizam-se as ideias de Pedroso (2011) no que se refere ao uso do computador e de materiais convencionais, tais como quadro, caderno e projetor multimídia, que não defende "[...] um ensino baseado apenas no uso do computador, mas sim um ensino que faça uso dos recursos computacionais como um instrumento de aprendizagem" (PEDROSO, 2011, p. 46). Esta utilização atrela-se, nesta pesquisa, ao ensino e à aprendizagem de números complexos, polinômios e equações polinomiais.

Um estudo de Reis Neto (2009, p. 15) mostra que uma abordagem metodológica

> baseada em técnicas operatórias, resolução de exercícios e memorização de regras e propriedades [...] faz com que alunos apresentem muita dificuldade em trabalhar com números complexos e até mesmo se neguem a aceitar a sua existência. Ensinar algoritmos sem que os alunos tenham desenvolvido o significado das operações leva a mecanização sem compreensão, que traduz não só em resultados indesejáveis como também numa atitude de rejeição ao estudo desses números.

Além disso, frente às dificuldades iniciais apresentadas pelos estudantes na abordagem de polinômios, Ferreira (2009, p. 17) comenta que:

> [...] apesar da maior ênfase dada pela maioria dos professores, e por certos livros didáticos, aos conteúdos algébricos, percebe-se que esse momento de estudo da álgebra para a formação matemática continua sendo um dos mais difíceis para os alunos.

A utilização de ferramentas que sirvam como suporte para o ensino da Matemática aos nativos digitais deve se tornar uma prática dos professores. Além disso, existem conteúdos da Matemática que não têm aplicação direta no cotidiano, mas servem de subsídio para outras áreas do conhecimento ou apenas dentro da própria Matemática. Desta forma, a utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) como suporte ao professor em sala de aula para o ensino e aprendizagem de Matemática é uma possibilidade. Entretanto, "[...] apesar dos avanços, pouco ainda se conhece sobre o impacto das TICs em sala de aula, tanto no que diz respeito às crenças, às habilidades, às concepções de professores, alunos e pais como, também, ao próprio processo de ensino" (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 46).

Nesta pesquisa, as tecnologias digitais são abordadas por meio da utilização da plataforma educacional *Khan Academy*. Os estudantes podem aproveitá-la como uma forma de estudar diferentes conteúdos matemáticos, ou de outras áreas do conhecimento, uma vez que a plataforma dispõe de conteúdos de Matemática de todos os níveis de ensino (Ensino Fundamental a Ensino Superior) e conteúdos relacionados a Ciências e Engenharia, Economia e Finanças, Computação, Artes e Humanidades. Desta forma, o estudante tem a oportunidade de desenvolver sua autonomia na busca de novos conhecimentos, propiciando uma maneira de sentir-se sujeito (co)responsável pela aprendizagem. Além disso, os estudantes podem resgatar conteúdos em que apresentam dificuldades ou com os quais não tenham tido contato durante sua trajetória estudantil.

Na plataforma educacional *Khan Academy* é possível que o professor monitore como os seus alunos estão envolvidos com a proposta através de relatórios fornecidos pelo sistema que informam sobre os horários de estudo, horas trabalhadas, questões resolvidas, vídeos assistidos, entre outras atividades realizadas pelos estudantes. Assim, este projeto de pesquisa, além de fornecer uma proposta de prática de ensino, apresenta a plataforma como um instrumento para a avaliação da aprendizagem.

Com o desenvolvimento desta pesquisa pretende-se identificar pontos positivos da utilização desta plataforma no ensino de números complexos, polinômios e equações polinomiais, bem como apontar as dificuldades encontradas em sua utilização. Com os relatórios fornecidos pelo sistema objetiva-se inferir sobre o processo de aprendizagem destes conteúdos pelos estudantes envolvidos.

A problemática desenvolvida nesta pesquisa teve como motivação pessoal algumas práticas durante a trajetória do autor no curso de Licenciatura em Matemática do IFRS, *Campus* Caxias do Sul. Ao ingressar no curso, houve a atuação como bolsista de iniciação

científica no projeto “Desenvolvimento de mecanismos cinéticos reduzidos para a simulação de chamas e a utilização de softwares matemáticos para sua interpretação”. Neste momento, teve-se contato com softwares matemáticos (programação e parte gráfica) para a interpretação de resultados produzidos por mecanismos cinéticos reduzidos, tendo uma adaptação muito positiva com as tecnologias.

Durante a disciplina de “Educação e Tecnologias da Informação e Comunicação” teve-se a oportunidade de conhecer melhor as TICs, e a sua relação com o ensino de Matemática. Neste contexto, o autor vislumbrava realizar um estudo prático que relacionasse as TICs com o ensino de Matemática, ou utilizar as tecnologias na resolução de problemas de Matemática Aplicada. Optou-se por trabalhar no ensino de Matemática a fim de complementar a sua formação como futuro docente.

No início do ano de 2015 se conheceu a plataforma educacional *Khan Academy* e e a utilizou-se para estudos complementares. Em determinado momento, a professora Greice, orientadora deste trabalho, comentou que utilizava a plataforma com seus estudantes de forma complementar. Então, teve-se a ideia de explorá-la em sala de aula para o ensino de números complexos, polinômios e equações polinomiais, assuntos densos, para os quais seria interessante que os estudantes tivessem vídeos, exercícios, dicas e materiais para estudo. Além disso, pensou-se em explorar possibilidades para utilizá-la como um dos instrumentos de avaliação.

1.1 OBJETIVOS DA PESQUISA

A pesquisa tem por finalidade criar e executar uma prática de ensino sobre números complexos, polinômios e equações polinomiais, por meio do uso da plataforma educacional *Khan Academy* e, adjacente a este processo, refletir sobre a aprendizagem dos estudantes participantes.

Para alcançar o objetivo geral deste trabalho, colocam-se os seguintes objetivos específicos:

1. Apresentar para os estudantes do 3º ano do Ensino Médio do IFRS, *Campus* Caxias do Sul, turno manhã, a plataforma educacional *Khan Academy* como uma ferramenta para o estudo de números complexos, polinômios e equações polinomiais.
2. Elaborar e aplicar planos de aula sobre números complexos, polinômios e equações polinomiais, que contemplem a utilização da plataforma educacional *Khan Academy*.
3. Monitorar as dificuldades apresentadas pelos estudantes na plataforma e contribuir no processo de aprendizagem destes conceitos por meio da indicação de atividades complementares da própria plataforma e/ou de sala de aula.

4. Avaliar a utilização da plataforma por meio de questionário, a fim de verificar as contribuições na aprendizagem do ponto de vista dos estudantes.
5. Analisar o processo de aprendizagem dos estudantes envolvidos por meio dos relatórios fornecidos pela plataforma educacional *Khan Academy* e de atividades avaliativas realizadas em sala de aula.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

No capítulo 2, aborda-se o ensino híbrido aliado às Tecnologias da Informação e Comunicação. Na sequência, no capítulo 3, é descrita a tecnologia empregada neste trabalho, a plataforma educacional *Khan Academy*, contando com um breve histórico da plataforma, pesquisas desenvolvidas sobre a plataforma nos últimos anos, e possibilidades de sua utilização nos perfis estudante e professor. No capítulo 4, apresenta-se a metodologia utilizada na construção desse trabalho, bem como, os procedimentos metodológicos para sua execução. No capítulo 5, encontram-se os resultados e discussões construídos a partir da análise de atividades avaliativas e da participação dos estudantes. As considerações finais apresentam-se no capítulo 6, bem como, sugestões de futuros trabalhos nesta temática. Por fim, encontram-se as referências utilizadas na elaboração deste trabalho, o formulário de avaliação respondido pelos estudantes, os planos de aula e os termos de consentimento da pesquisa.

2 TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO EM SALA DE AULA

Neste capítulo trata-se da utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação em sala de aula, motivando o seu uso aliado ao ensino híbrido, proposta pedagógica que vem sendo abordada nos últimos anos em função do desenvolvimento da sociedade.

A sociedade passa por transformações, decorridas do processo de globalização, acabam gerando um alto quantitativo de informações disponíveis às pessoas. Assim, por estarem sob influência da internet, as formas de emissão, transmissão e recepção de informações mudam constantemente, acarretando em mudanças em âmbito de sociedade. Como descrito por Michael (2012, p. 16),

> Com a nova forma de receber informações, as pessoas agora tem (*sic.*) acesso a uma infinidade de possibilidades, desde hobbies a fontes alternativas de renda. Por ser tão fácil e rápido ter acesso a essas novas informações, a sociedade precisa de mais flexibilidade, mais interação, e a educação também.

Portanto, estas transformações que estão ocorrendo na sociedade em seus vários setores, ocasionam também mudanças educacionais, que envolvem a escola, os professores e os alunos.

De acordo com Souza (2015), as TICs referem-se a todas as tecnologias que de algum modo estão inseridas em nosso dia a dia, sendo uma das finalidades servir como mediação entre a comunicação humana e o conhecimento. A exemplo disso, podemos mencionar computadores, televisões, smartphones, tablets, entre outros.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000, p. 50) faz-se menção à introdução das tecnologias no espaço escolar:

> Com o advento do que se denomina sociedade pós-industrial, a disseminação das tecnologias da informação nos produtos e nos serviços, a crescente complexidade dos equipamentos individuais e coletivos e a necessidade de conhecimentos cada vez mais elaborados para a vida social e produtiva, as tecnologias precisam encontrar espaço próprio no aprendizado escolar regular, de forma semelhante ao que aconteceu com as ciências, muitas décadas antes, devendo ser vistas também como processo, e não simplesmente como produto.

Entretanto, ainda existe uma distância entre as tecnologias digitais e a escola, em relação ao ensino e à aprendizagem. Sobre as TICs, nas Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica (BRASIL, 2013, p. 31) consta que:

> As tecnologias da informação e comunicação constituem uma parte de um contínuo desenvolvimento de tecnologias, a começar pelo giz e os livros, todos podendo apoiar e enriquecer as aprendizagens. Como qualquer ferramenta, devem ser usadas e adaptadas para servir a fins educacionais e como tecnologia assistiva; desenvolvidas de forma a possibilitar que a interatividade virtual se desenvolva de modo mais intenso, inclusive na produção de linguagens. Assim, a infraestrutura tecnológica, como apoio pedagógico às atividades escolares, deve também garantir acesso dos

> estudantes à biblioteca, ao rádio, à televisão, à internet aberta às possibilidades da convergência digital.
> Essa distância necessita ser superada, mediante aproximação dos recursos tecnológicos de informação e comunicação, estimulando a criação de novos métodos didático-pedagógicos, para que tais recursos e métodos sejam inseridos no cotidiano escolar.

Com a finalidade de diminuir esta distância entre os recursos e a sala de aula, BRASIL (2013, p. 58) ainda sugere que na construção do Projeto Político-Pedagógico das instituições escolares deva ser prevista a formação continuada dos professores incluindo vivências relacionadas às TICs:

> VII – preveja a formação continuada dos gestores e professores para que estes tenham a oportunidade de se manter atualizados quanto ao campo do conhecimento que lhes cabe manejar, trabalhar e quanto à adoção, à opção da metodologia didático-pedagógica mais própria às aprendizagens que devem vivenciar e estimular, incluindo aquelas pertinentes às Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC);

A partir das diversas transformações da sociedade, e todas as relações que podem ser advindas delas, e da utilização das TICs, BRASIL (2013, p. 59) coloca que na construção do Projeto Político-Pedagógico devem ser previstas:

> IX – a utilização de novas mídias e tecnologias educacionais, como processo de dinamização dos ambientes de aprendizagem;
> X – a oferta de atividades de estudo com utilização de novas tecnologias de comunicação.

O uso das tecnologias "[...] exige que o professor se atualize para que a produtividade do aluno inserido nesse contexto seja realmente concretizada" (PERIUS, 2012, p. 22). Além disso, não se trata de " [...] substituir o quadro, o giz, o caderno ou o livro, pelo computador" (PEDROSO, 2011, p. 14), mas sim propiciar novas formas e possibilidades de uso. O professor como agente transformador de realidades, deve ter em mente que:

> [...] educar no contexto das tecnologias digitais, significa ver a aprendizagem enquanto processo contínuo, que valoriza a imaginação criativa, o conflito de ideias e a autonomia do aprendiz (construcionismo). Dessa forma são fundamentais para os processos de aprender e ensinar as interações favorecidas pelas tecnologias, bem como as possibilidades de expressão criativa, de produção coletiva e de construção de conhecimento que elas aperfeiçoam, de forma crítica e, ainda, prazerosa. (PEDROSO, 2011, p. 16).

Perius (2012, p. 25) coloca que "[...] com os avanços tecnológicos, muitos recursos e estratégias estão disponíveis para auxiliar o professor em sua prática pedagógica, facilitando o entendimento do aluno, o que torna a aprendizagem mais significativa e atraente". Todavia, Pedroso (2011) afirma que é importante que todo o ambiente escolar tenha a intenção de se adaptar a novos métodos de ensino. Ou seja, o professor pode dedicar tempo a atividades envolvendo as tecnologias digitais, mas só obterá sucesso se a escola e os próprios estudantes contribuírem com esta ideia.

Neste sentido, o ensino híbrido vem como uma abordagem pedagógica que possibilita a combinação de atividades presenciais com atividades realizadas por meio das TICs. Segundo Bacich *et al.* (2015), dentre as diferentes propostas existentes na literatura, a estratégia básica do ensino híbrido consiste em se ter o foco do processo de aprendizagem no aluno e não na simples transmissão de informação por parte do professor. Esta abordagem pedagógica é inspirada nos novos modelos empregados na sociedade, como no sistema bancário, no comércio e nas linhas de produção das empresas. Com o ensino híbrido é possível fornecer uma ação personalizada aos estudantes no processo de ensino e de aprendizagem. Esta pesquisa segue as ideias dessa abordagem que são (FUNDAÇÃO LEMANN, 2017):

- Maior engajamento dos alunos no aprendizado;
- Melhor aproveitamento do tempo do professor;
- Ampliação do potencial da ação educativa visando intervenções efetivas;
- Planejamento personalizado e acompanhamento de cada aluno;
- Oferta de experiências de aprendizagem que estejam ligadas às diferentes formas de aprender dos alunos;
- Aproximação da realidade escolar com o cotidiano do aluno.

Nesta pesquisa o uso das TICs para o ensino de Matemática é feito por meio da plataforma educacional *Khan Academy*, apresentando-a e utilizando-a para o ensino e aprendizagem de números complexos, polinômios e equações polinomiais. O uso da plataforma se dá pelo fato de que

> [...] a tecnologia da informação e da comunicação possibilita o desenvolvimento de um aluno ativo no processo de ensino e aprendizagem, transformador do meio em que vive, pois a tecnologia motiva o aprendizado, instigando o aluno a aplicar e praticar o que se aprendeu, averiguar e fazer descobertas. (PERIUS, 2012, p. 13).

As TICs apresentam-se como importantes aliadas na construção da autonomia do estudante, pois elas permitem que o estudante busque complementar e aperfeiçoar seus conhecimentos no seu ritmo e de forma personalizada de acordo com o seu desenvolvimento, cabendo ao professor a função de mediador entre a autonomia do estudante e o direcionamento dos conteúdos. E não somente auxiliam na autonomia da aprendizagem do estudante, mas proporcionam um aproveitamento do tempo do professor em sala de aula, pois cada estudante possui a responsabilidade de se planejar e acompanhar seu desenvolvimento. As atividades de aula, atreladas à plataforma *Khan Academy*, que fornece materiais gratuitos e de fácil compreensão, proporcionam ao estudante mais de uma forma de aprender, podendo ocorrer a sua aprendizagem na sala de aula, e/ou de forma extraclasse.

Para Michael (2012, p. 13) a plataforma *Khan Academy* é “[...] um site bem estruturado e atraente para os alunos, já que possui um *layout* moderno e uma navegação intuitiva e comum a quem já está acostumado com o ambiente virtual”. A plataforma funciona como um incentivo ao estudante. Segundo o mesmo autor (MICHAEL, 2012, p. 15), os alunos “[...] precisam de incentivo e motivação. Com a quantidade de informações que lidamos hoje, tudo acontece muito rápido e o interesse do aluno é algo que está em constante movimento”.

Conforme Pedroso (2011, p. 46), a escola “[...] é o espaço que precisa mostrar o computador ao aluno como um instrumento que possibilita a aprendizagem e não só diversão, como muitos veem hoje em dia”. Neste sentido, a plataforma *Khan Academy*, apesar de se assemelhar a um jogo, é um instrumento que pode auxiliar na aprendizagem de diferentes conteúdos.

Em consonância com Perius (2012), nesta pesquisa acredita-se que, quando utilizadas de maneira adequada, as ferramentas tecnológicas possibilitam uma aprendizagem mais dinâmica, levando o aluno a construir um modo de pensar a Matemática de forma mais significativa.

Em seguida será apresenta a plataforma *Khan Academy*, contemplando aspectos do histórico, pesquisas desenvolvidas no Brasil e por fim expostas as suas funcionalidades para o estudante e para o professor.

3 A PLATAFORMA EDUCACIONAL *KHAN ACADEMY*

Neste capítulo, apresenta-se um breve relato sobre o histórico da plataforma educacional *Khan Academy*, algumas pesquisas que que foram desenvolvidas sobre a plataforma e uma descrição de suas ferramentas.

3.1 HISTÓRICO

O livro “Um mundo, uma escola: a educação reinventada” de Salman Khan (KHAN, 2013), trata da história da aceitação e crescimento da *khanacademy.org* e faz uma reflexão sobre como ensinamos e aprendemos na atualidade. Um breve relato é descrito na sequência.

Segundo seu próprio fundador, Salman Khan, a plataforma *Khan Academy* é “[...] uma instituição dedicada a oferecer educação gratuita a qualquer pessoa em qualquer lugar” (KHAN, 2013, p. 9). Conforme Menegais (2015), a plataforma é uma organização sem fins lucrativos, fundada oficialmente em 2006. Seu fundador é “[...] graduado em Matemática, Informática e Engenharia Elétrica pela Massachussetts Institute Of Tecnology (MIT), sendo também mestre em Informática e Engenharia Elétrica pela mesma instituição” (MENEGAIS, 2015, p. 46).

Em 2004, a partir de um resultado não satisfatório em uma prova de nivelamento em Matemática no seu sexto ano, Nadia, prima de Khan, ficou desmotivada, mas aceitou o resultado, acreditando que não sabia Matemática. Como Khan via um potencial naquela garota, fez a proposta de que se Nadia pudesse refazer o teste, ele daria aulas particulares a ela, à distância, mesmo sem ao certo saber como estas aulas iriam ocorrer (KHAN, 2013). Khan (2013, p. 22) acreditava que se Nadia “[...] entendesse os fundamentos conceituais da matemática, o fluxo de uma ideia para outra, todo o restante seria fácil”.

Khan tinha convicções de que “[...] ensinar é um talento à parte – na verdade, é uma arte criativa, intuitiva e muito pessoal” (Khan, 2013, p. 14). Por meio de experimentos com sua prima, Khan pôde perceber o que fortalecia a sua aprendizagem, e também perceber o que não funcionava na hora de ensinar. Na época ele ainda trabalhava com finanças, mas via neste propósito um potencial de ajudar na aprendizagem.

Suas aulas começaram a se espalhar entre os parentes, e a plataforma *Khan Academy* começou a tomar forma a partir das necessidades dos alunos. Em 2006, Khan já orientava primos e amigos da família, tendo um acervo de geradores de questões, entretanto, conforme aumentava o número de estudantes, perdia o acompanhamento individual. Nesta fase, o fundador já estava com a ideia de amarrar conceitos usando-se de pré-requisitos.

No ano de 2007, milhares de estudantes acompanhavam os vídeos da plataforma *Khan Academy* no YouTube e parte destes estudantes já faziam exercícios no site. A plataforma crescia de maneira bem acelerada, de modo muito gratificante para Khan, mesmo sem conhecer fisicamente seus estudantes. Nesta época, Khan (2013, p. 95) "[...] ainda não tinha o privilégio e o desafio de estabelecer uma interface com professores e alunos no mundo real" e, a partir do programa Península Bridge que tinha por objetivo "[...] prover oportunidades educacionais para crianças do segundo segmento do ensino fundamental de escolas e bairros com poucos recursos" (KHAN, 2013, p. 95), Salman teve a oportunidade de apresentar o seu software e, a partir de sua aceitação, verificar como seria a relação entre o software e seus vídeos com os estudantes, além de pensar de que forma poderia utilizar esse sistema como um complemento para a sala de aula.

No ano seguinte, quando a "[...] crise econômica mundial paralisou os mercados e provocou a quebra de bancos" (KHAN, 2013, p. 116), Khan introduziu na plataforma questões relacionadas a Finanças, identificando que havia um público adulto interessado em "[...] aprender por toda a vida e em manter suas mentes ativas" (KHAN, 2013, p. 116).

Em 2009 a plataforma começou a ter vida própria e, em seu tempo livre, Khan trabalhava cada minuto para aprimorar a plataforma e cada vez mais percebia que sua missão estava na *Khan Academy* e não em seu trabalho de analista de fundos de hedge, pedindo demissão no mesmo ano. Além disso, com a ajuda de amigos e professores, pôde aprimorar o sistema de *feedback*.

No ano de 2010 foi convidado para reuniões com engenheiros e executivos de grandes empresas, os quais já vinham usando a *Khan Academy* para si ou para seus filhos. Com o apoio de grandes empresas, os vídeos que produzia acabaram por ficar em segundo plano e, então, começou a montar uma equipe e projetos pilotos.

No próximo ano Khan teve novas experiências em uma escola renomada, com professores e estudantes querendo trabalhar com a plataforma. Nessa época, mais de 350 mil estudantes estavam utilizando a plataforma.

Em 2012, a plataforma já estava ajudando mais de 6 milhões de estudantes por mês. Os vídeos tinham sido vistos mais de 140 milhões de vezes e estudantes tinham feito mais de meio bilhão de exercícios na plataforma. Todas as aulas em vídeo eram gratuitas e isentas de comerciais. A instituição se tornara a plataforma educacional mais utilizada da internet (KHAN, 2013).

A Fundação Lemann, em 2014, iniciou a tradução da plataforma educacional *Khan Academy* para o Português. Atualmente, a Fundação oferece um programa gratuito que leva a *Khan Academy* a escolas públicas, formando professores para utilização da plataforma com seus alunos e para a troca de experiências geradas nesta plataforma com outros educadores (FUNDAÇÃO LEMANN, 2017).

3.2 PESQUISAS SOBRE A *KHAN ACADEMY*

Nesta seção apresenta-se uma revisão sobre pesquisas realizadas no Brasil, que utilizaram a plataforma *Khan Academy* em estudos relacionados à Educação ou ao Ensino de Matemática.

Anteriormente às traduções da plataforma educacional *Khan Academy* para o Português, pela Fundação Lemann, Michael (2012) apresentou o uso de vídeos no ensino de Matemática, inspirado pelos vídeos disponíveis na *Khan Academy*. O autor criou atividades de acordo com as disponíveis na plataforma para seus estudantes, a partir de três projetos.

No primeiro projeto foi feito um vídeo sobre a lei dos senos, o qual foi assistido por estudantes de uma escola. Na sequência, eles responderam perguntas sobre o conteúdo e como foi a experiência desta aula em formato de vídeo. No segundo projeto os vídeos eram mais curtos, a fim de aumentar a flexibilidade de ver e rever. Neste projeto, os vídeos eram sobre as relações entre o lado de um polígono, com o raio da circunferência inscrita e circunscrita neste polígono. O terceiro projeto foi realizado com estudantes voluntários e o vídeo deveria ser assistido em casa. Em um determinado horário, fora do período de aula, o professor ficava *online* para auxílio em orientações e eventuais dúvidas. Na sequência, uma aula presencial sobre o mesmo tópico foi realizada para estes estudantes voluntários, os quais responderam também a perguntas sobre os vídeos. A partir de suas experiências constatou-se que o vídeo pode ser utilizado no ensino, mas que ele deve ser usado como uma das ferramentas e que o método não é determinístico para a aprendizagem, pois a mesma atividade pode gerar resultados diferentes a qual pode ter como fator a relação entre professor e aluno.

Tavares *et al.* (2012) estudaram o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação, utilizando como estudo de caso a *Khan Academy*. Os autores questionam se esta utilização se direciona a uma abordagem construtivista ou uma nova ferramenta para a abordagem tradicional. Embora, a partir deste estudo, os autores categorizem a maioria dos itens da plataforma *Khan Academy* como uma abordagem tradicional, concluem que as duas abordagens estão presentes e são complementares na plataforma. Tavares *et al.* (2012, p. 10) ainda afirmam que

> A ausência de consenso quanto a métodos e técnicas a serem empregados na abordagem construtivista pode ser um indício de que não há um rompimento com a abordagem tradicional, mas sim uma tentativa de melhoria dos métodos e técnicas empregadas nesta abordagem.

Sena (2014) apresenta um material instrucional, em português, para todos os tipos de usuário da plataforma, visto que, até o momento de sua pesquisa, materiais não haviam sido traduzidos do inglês para o português. Tal material aborda como utilizar a plataforma

Khan Academy desde o cadastro até dicas de como o professor pode monitorar a aprendizagem dos estudantes. O autor coloca que a *Khan Academy* pode ser utilizada na educação a distância, semipresencial ou presencial para o ensino de Matemática, com a intenção de tornar a aprendizagem em Matemática mais dinâmica, para alunos ditos nativos digitais.

Menegais (2015) traz um estudo sobre a inserção da *Khan Academy* na prática docente por meio da formação continuada de professores. A sua pesquisa

> [...] procura contribuir para a melhoria do desempenho dos estudantes em Matemática das escolas públicas da região de Bagé/RS, aplicando a metodologia da *Khan Academy* em sala de aula com a formação continuada dos professores para posterior análise dos benefícios decorrentes dessa utilização, no que diz respeito à aprendizagem de Matemática, em específico. (MENEGAIS, 2015, p. 35).

A referida pesquisa aborda a construção digital no Brasil. Antes de seu foco à *Khan Academy*, foi realizado o estudo de um currículo de um curso de Licenciatura em Matemática, com um olhar sob a temática das tecnologias digitais na formação inicial dos licenciandos, a fim de verificar se os professores de Matemática são preparados para lidar com estas novas tecnologias. Em sua pesquisa, Menegais (2015) menciona que a *Khan Academy* foi inserida para auxiliar os professores, a partir da reflexão da prática pedagógica, na construção de novos saberes. Com o curso de formação continuada, foi possível auxiliar os professores a planejarem atividades envolvendo a *Khan Academy*, necessitando, então, desenvolver competências tecnológicas e didáticas para a utilização desta plataforma. Além disso, este referencial foi usado para verificar como as atividades deste curso de formação influenciaram na prática docente.

A plataforma está inserida em um contexto de que o estudante pode ser responsável pela sua própria aprendizagem, entretanto, Menegais (2015, p. 58) defende que

> para o estudante obter proficiência em determinado assunto ou matéria, é fundamental a mediação do professor, pois assim, torna-se viável a compreensão do que acontece com cada estudante, [...] trazendo melhorias para o ensino e aprendizagem.

A autora constatou que “[...] as professoras consideraram a plataforma um ótimo recurso didático para a (re)construção de conhecimentos, tanto para estudantes quanto para professores” (MENEGAIS, 2015, p. 165). Alguns pontos positivos na utilização da plataforma *Khan Academy* foram listados como sendo: “[...] melhor desempenho dos estudantes na disciplina de Matemática, maior interesse, motivação e participação nas aulas, maior compreensão dos conteúdos abordados” (MENEGAIS, 2015, p. 166). Com relação às dificuldades vivenciadas, a autora traz os problemas de infraestrutura das escolas, como o tamanho dos laboratórios de informática e o acesso à internet.

No estudo de Souza e Souza (2016) faz-se uma análise da *Khan Academy* a fim de demonstrar se é favorável a utilização deste recurso metodológico para estudantes e professores. Os autores realizam uma revisão sobre as TICs e um estudo de funcionalidades da *Khan Academy* a partir de uma perspectiva pedagógica. De acordo com Souza e Souza (2016, p. 22),

> [...] a *Khan Academy* pode favorecer o desenvolvimento da autonomia, imprescindível para a emancipação do sujeito por meio de uma participação ativa do estudante na plataforma transformando-o em um dos sujeitos principais de sua própria aprendizagem.

Outra ideia de Souza e Souza (2016), que vai ao encontro desta pesquisa, é que a Plataforma *Khan Academy* não resolverá todos os problemas educacionais de ensino e aprendizagem, entretanto o mesmo pode ser utilizado tanto pelo estudante, como pelo professor, como uma tentativa para melhores resultados nas disciplinas de Matemática.

Corrêa (2016) realiza um estudo utilizando a plataforma *Khan Academy* em uma abordagem de ensino híbrido em Matemática em uma escola de Ensino Fundamental. Fundamenta os diversos recursos de funcionamento da plataforma com a Neurociência Cognitiva, estabelecendo "[...] algumas relações entre o modo como opera a plataforma, e o modo como opera o cérebro humano em processos de aprendizagem" (CORREA, 2016, p. 7). O mesmo autor (2016, p. 7) coloca que as vantagens da plataforma residem

> [...] no respeito ao ritmo e tempo próprio de cada indivíduo em seu processo de aprendizagem, na imensa e variada quantidade de problemas a serem resolvidos pelos estudantes, com *feedback* imediato dos resultados obtidos em direção ao domínio das habilidades pretendidas, além da possibilidade de acompanhamento – pelo professor-tutor – do processo, ao invés da centralização no produto, permitindo desta forma uma avaliação contínua e personalizada do estudante com intervenções pontuais em suas atividades auxiliando-o na busca de autonomia intelectual.

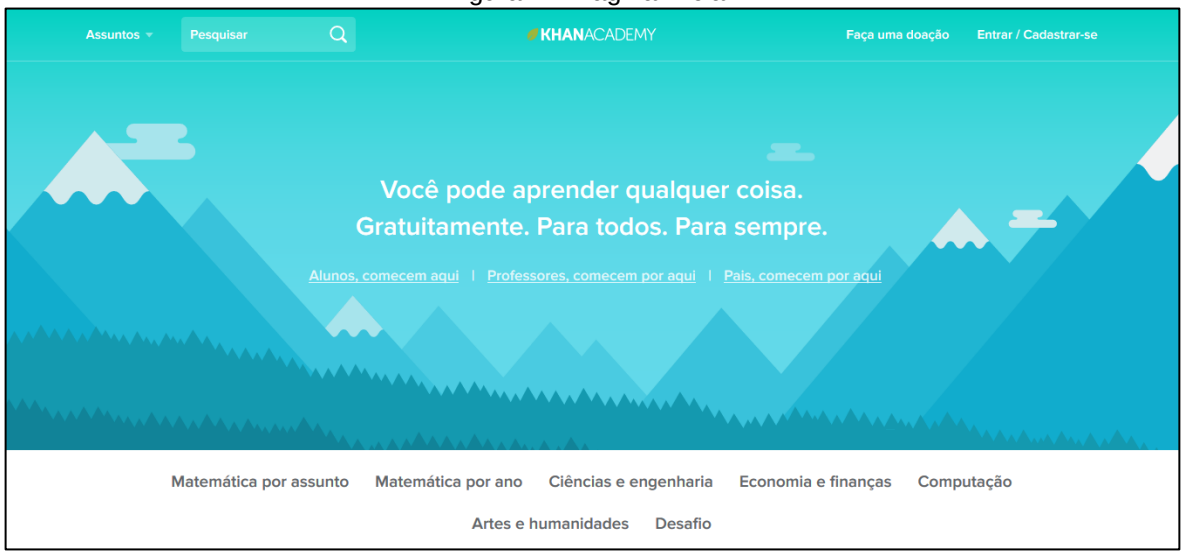
Em sua experiência com os alunos do Ensino Fundamental, Corrêa (2016) conclui que para grande parte dos estudantes houve um avanço relevante na aprendizagem e que "[...] a proposta do trabalho desenvolvida rendeu bons frutos e [...] deve ser continuada como forma de melhorar o trabalho feito pela escola" (CORREA, 2016, p. 74).

3.3 APRESENTAÇÃO DA PLATAFORMA *KHAN ACADEMY* E CADASTRO

A página inicial da plataforma *Khan Academy*[1] é apresentada na Figura 1. Nela consta a seguinte frase: "Você pode aprender qualquer coisa. Gratuitamente. Para todos. Para sempre." (*KHAN ACADEMY*, 2017).

[1] Disponível em: <pt.khanacademy.org/>. Acesso em: maio 2017.

Figura 1 – Página inicial.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Como a plataforma não tem fins lucrativos, os usuários podem realizar doações a esta Instituição, em vista da missão de "[...] proporcionar educação gratuita de alta qualidade para todos, em qualquer lugar." (*KHAN ACADEMY*, 2017). Quando clicado em "Realizar uma Doação", é aberta uma página onde explica-se para onde são direcionadas estas doações, formas de doação e a importância de realizar uma doação. As doações não são obrigatórias, sendo apenas uma forma de manter esta grande plataforma e ajudar os colaboradores a "continuar ensinando" (*KHAN ACADEMY*, 2017).

Voltando à página inicial, na guia "Assuntos" são mostrados os principais tópicos encontrados na *Khan Academy*, conforme se observa na Figura 2.

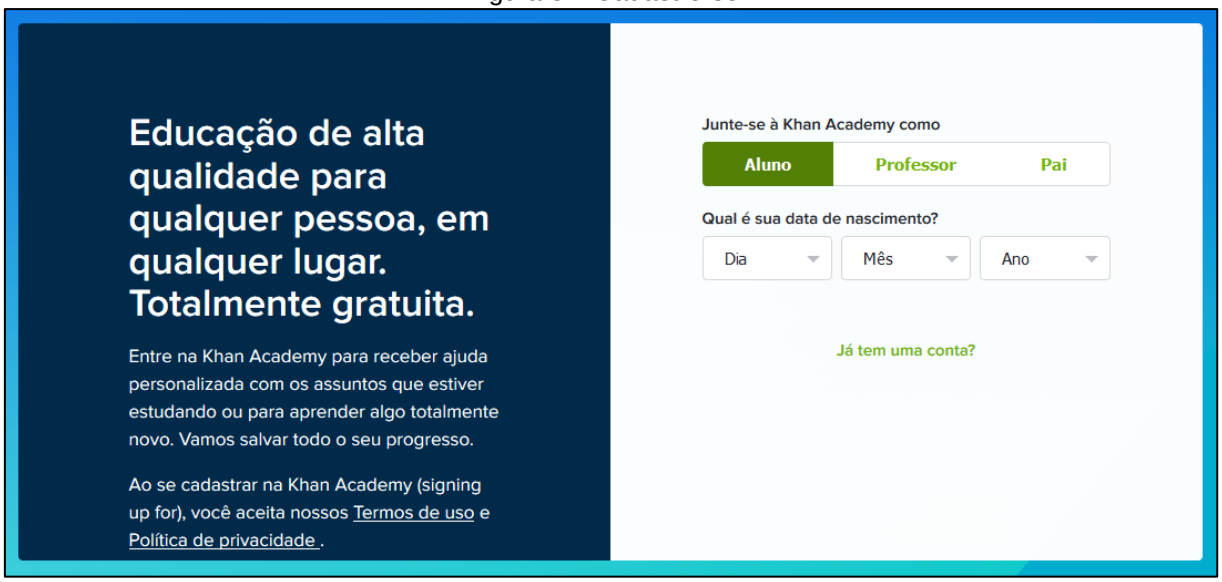
Figura 2 – Assuntos.

Fonte: *Khan Academy* (2017).

A plataforma tem um enfoque maior em Matemática, mas apresenta também tópicos em "Ciências e engenharia", "Economia e finanças", "Computação", "Artes e humanidades". A plataforma é livre, entretanto para utilizar-se de todas as suas ferramentas é necessário

fazer um cadastro como estudante, professor ou pai. Os vídeos são de acesso livre no YouTube[2]. Para cadastrar-se na plataforma, existem duas maneiras: a primeira, disponível na página inicial, é clicar em uma das possibilidades, dependendo de seu objetivo, “Alunos comecem aqui”, “Professores, comecem por aqui” ou “Pais, comecem por aqui”. A segunda é clicar em “Cadastre-se” no canto superior direito da página (Figura 3) identificando-se como aluno, professor ou pai. É permitido vincular uma conta do Google ou Facebook, sendo que para estudantes é necessário colocar a data de nascimento no cadastro. Para os participantes que não tem interesse em vincular suas contas existentes, cria-se uma conta em “Crie uma nova conta”.

Figura 3 – Cadastre-se.



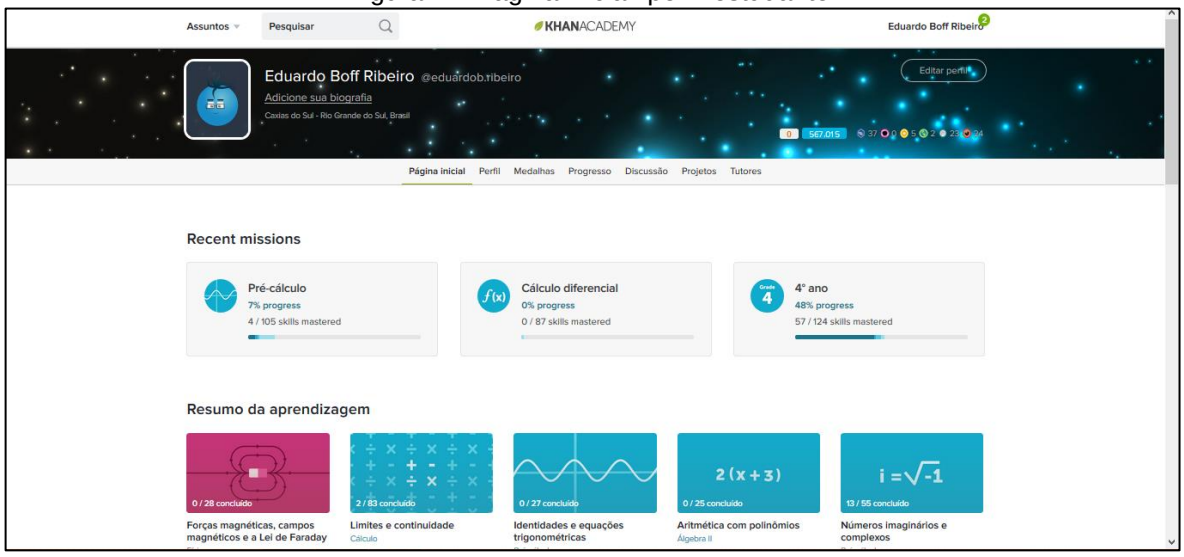
Fonte: *Khan Academy* (2017).

3.4 PERFIL ESTUDANTE

Assim que o estudante acessa sua conta, ele pode escolher algum avatar e os assuntos que gostaria de estudar. Conforme as atividades forem sendo realizadas, o avatar vai se desenvolvendo, como em um jogo. Na página inicial para o perfil estudante (Figura 4), aparecem as “Missões recentes”, “Resumo da Aprendizagem”, “Vídeos selecionados pela equipe” e “Nossos tópicos favoritos”. É possível, nesta página, acessar o avatar, o editar perfil e consultar o nível de energia obtido, bem como as medalhas conquistadas.

[2] Disponível em: <www.youtube.com>. Acesso em: maio 2017.

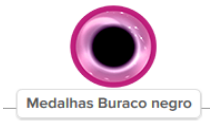
Figura 4 – Página inicial: perfil estudante.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Ao clicar em “Perfil”, a plataforma direciona o usuário para uma página onde constam as medalhas, contagem de suas medalhas, atividades recentes, projetos, discussões. Estas medalhas são dadas ao estudante/professor/pai assim que alguma tarefa é concluída. Existem 6 tipos delas, conforme apresenta-se no Quadro 1.

Quadro 1 – Medalhas.

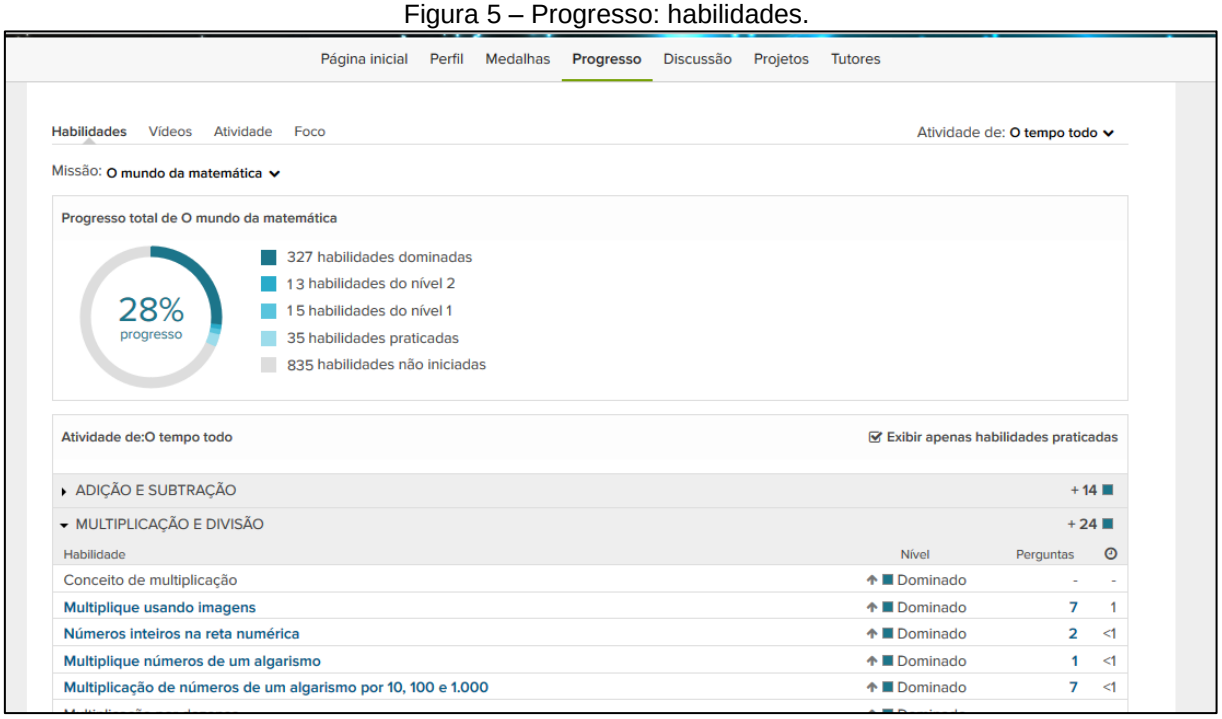
Medalhas	Descrição
	As **Medalhas Meteorito** são comuns e fáceis de ganhar quando se está apenas começando.
	As **Medalhas Lua** são incomuns e representam um investimento na aprendizagem.
	As **Medalhas Terra** são raras. Elas requerem uma quantidade significativa de conhecimento.
	As **Medalhas Sol** são épicas. Ganhá-las é um verdadeiro desafio e exige incrível dedicação.
	As **Medalhas Buraco Negro** são lendárias e desconhecidas. Elas são as premiações mais raras da *Khan Academy*.
	As **Medalhas de Desafio** são prêmios especiais conferidos ao se completar os desafios de tópico.

Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

As medalhas funcionam como uma recompensa, um reconhecimento pelas atividades realizadas na plataforma. Esta estrutura é descrita por Corrêa (2016, p. 20) como algo que se “[...] assemelha muito a um jogo de vídeo-game, onde o aluno faz o papel do jogador e as fases do jogo são as missões que o aluno deve completar. Completando as missões, o aluno é premiado com recompensas (pontos de energia e medalhas)”.

Na plataforma o estudante também pode conferir como está seu progresso. Encontra-se na guia “Progresso > Atividades” todas as atividades realizadas pelo estudante que já foram praticadas e desenvolvidas. O aluno pode ver seu progresso perante as habilidades (Figura 5) nas diferentes missões da plataforma, em diferentes períodos.

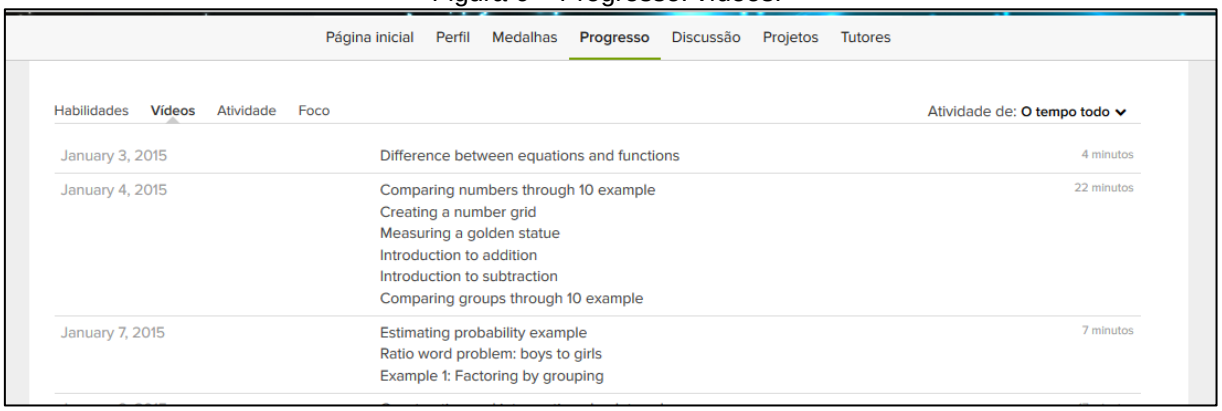
Figura 5 – Progresso: habilidades.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Em “Progresso > Vídeos” (Figura 6) consta o dia de acesso, qual o vídeo assistido e a quantidade em minutos.

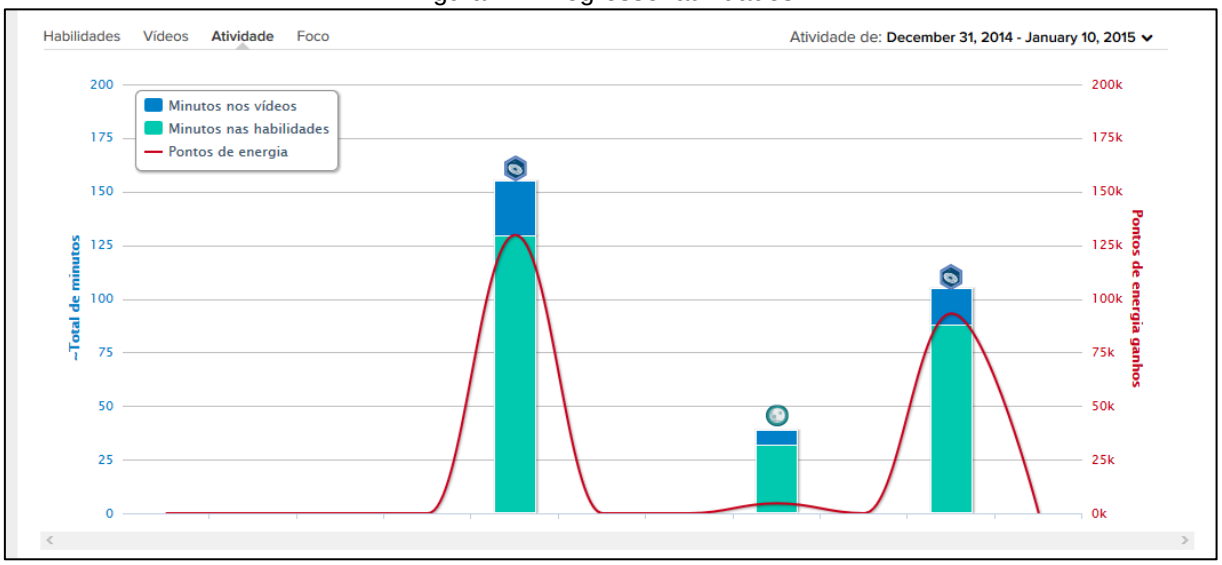
Figura 6 – Progresso: vídeos.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

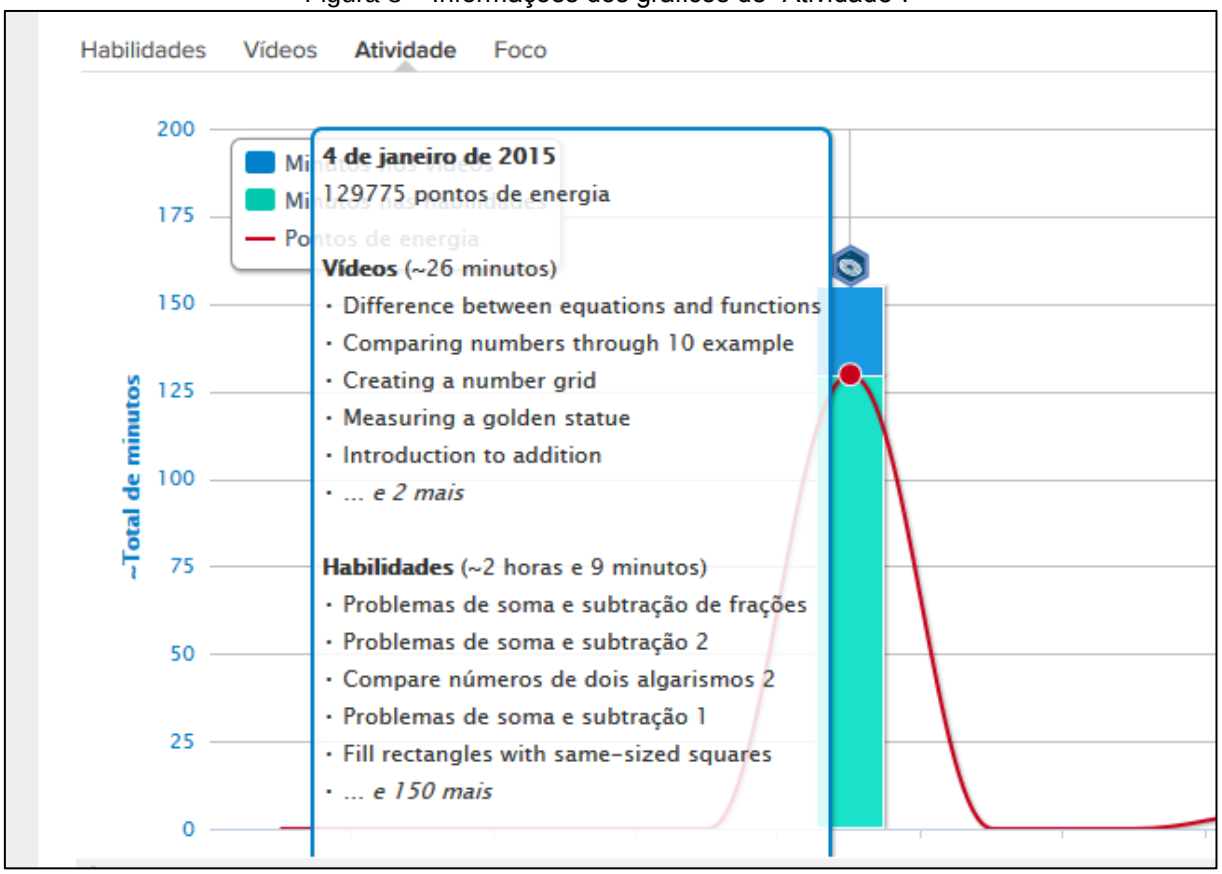
Em “Progresso > Atividades” (Figura 7) são apresentados em um gráfico de dias por tempo em minutos por pontos de energia obtidos em vídeos, em habilidades, e também as medalhas conquistadas. Com a aproximação do mouse nas curvas do gráfico, pode-se obter mais informações sobre aquela parte do gráfico (Figura 8).

Figura 7 – Progresso: atividades.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

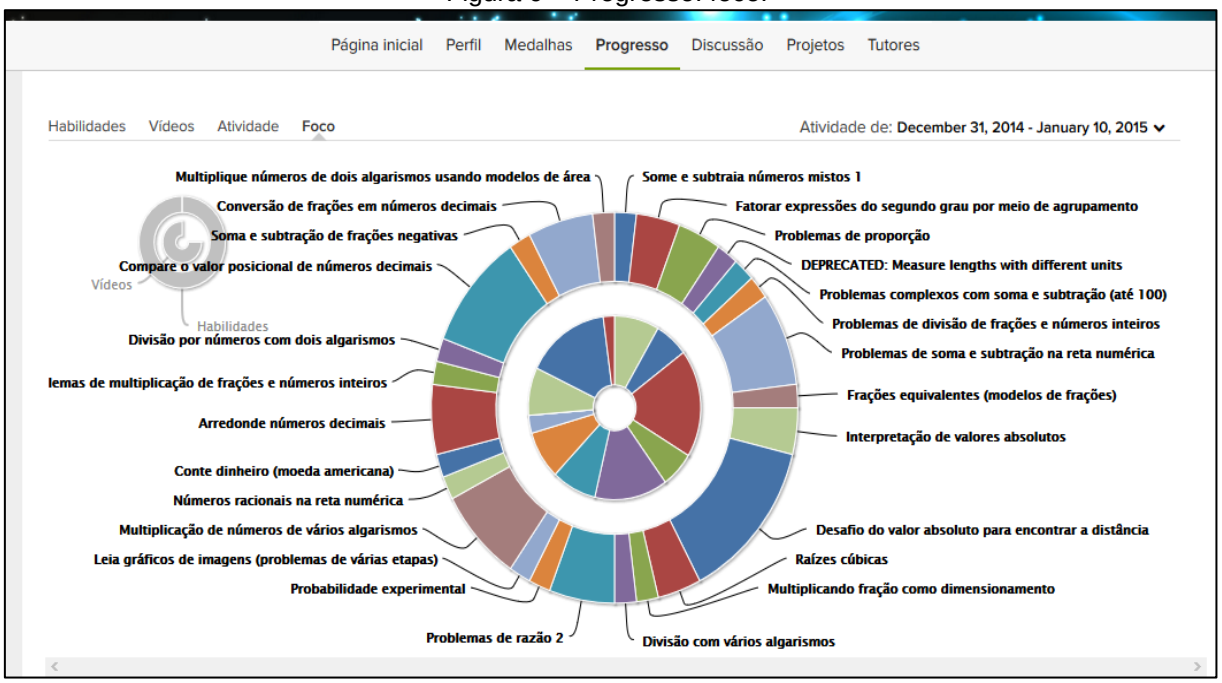
Figura 8 – Informações dos gráficos de “Atividade”.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

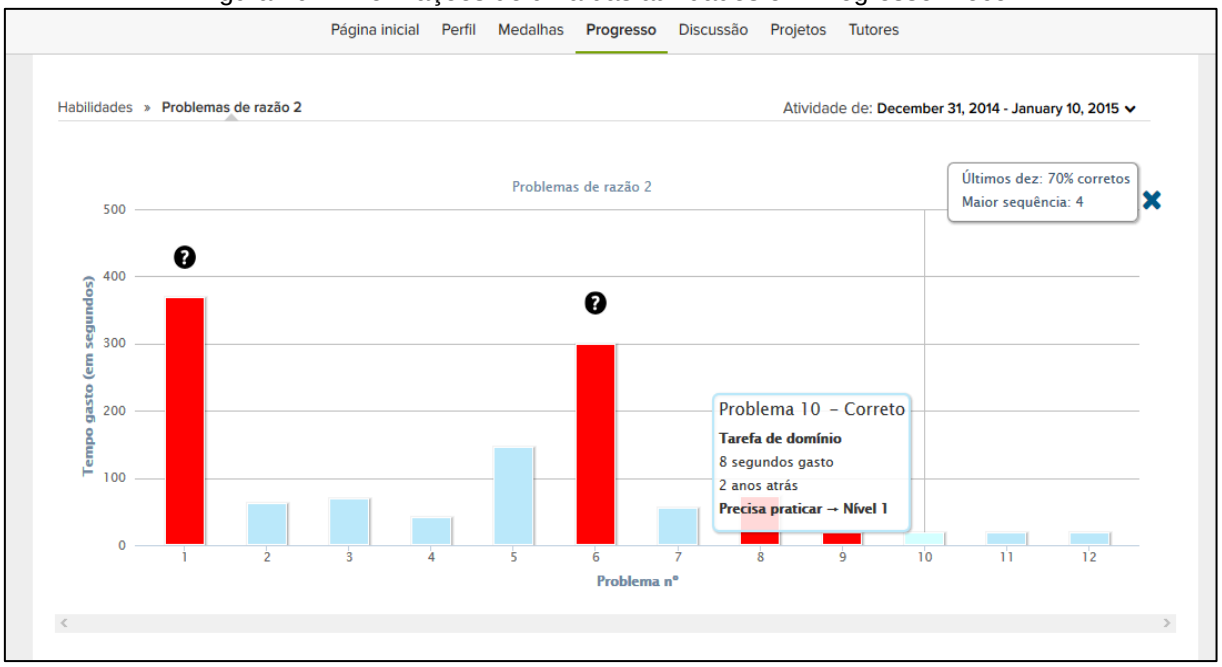
Em “Progresso > Foco” (Figura 9) o estudante dispõe de um gráfico em setores sobre assuntos estudados na plataforma (setor externo: habilidades; setor Interno: vídeos). Com a aproximação do mouse a estes setores é possível obter mais informações sobre suas respostas em atividades da *Khan Academy*. Clicando nestes gráficos (Figura 10) expõem-se as atividades relacionadas àquela habilidade, mostrando informações como a porcentagem de acerto nas últimas atividades, sequência de acertos, e tempo gasto em minutos.

Figura 9 – Progresso: foco.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Figura 10 – Informações de uma das atividades em Progresso>Foco.

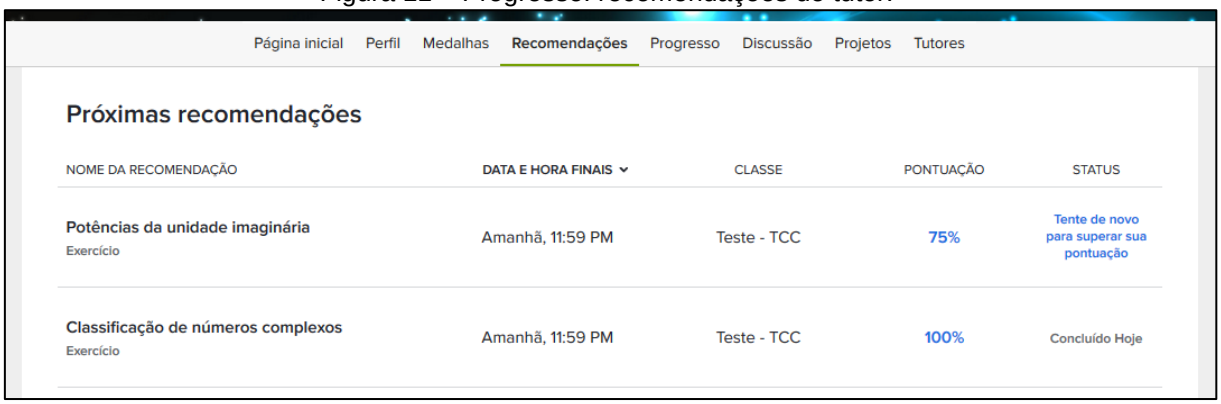


Fonte: *Khan Academy* (2017).

Neste gráfico também é possível obter informações sobre o problema, como por exemplo, verficar se o estudante utilizou alguma dica. Como visto na Figura 10, também é possível, com a aproximação do cursor do mouse em uma etapa verificar o desenvolvimento do estudante na atividade.

Ao lado de “Progresso” consta a guia “Recomendações” (Figura 11), caso o estudante tenha um tutor adicionado, onde estarão disponíveis recomendações de seu tutor, sua pontuação e seu status nestas atividades.

Figura 11 – Progresso: recomendações do tutor.

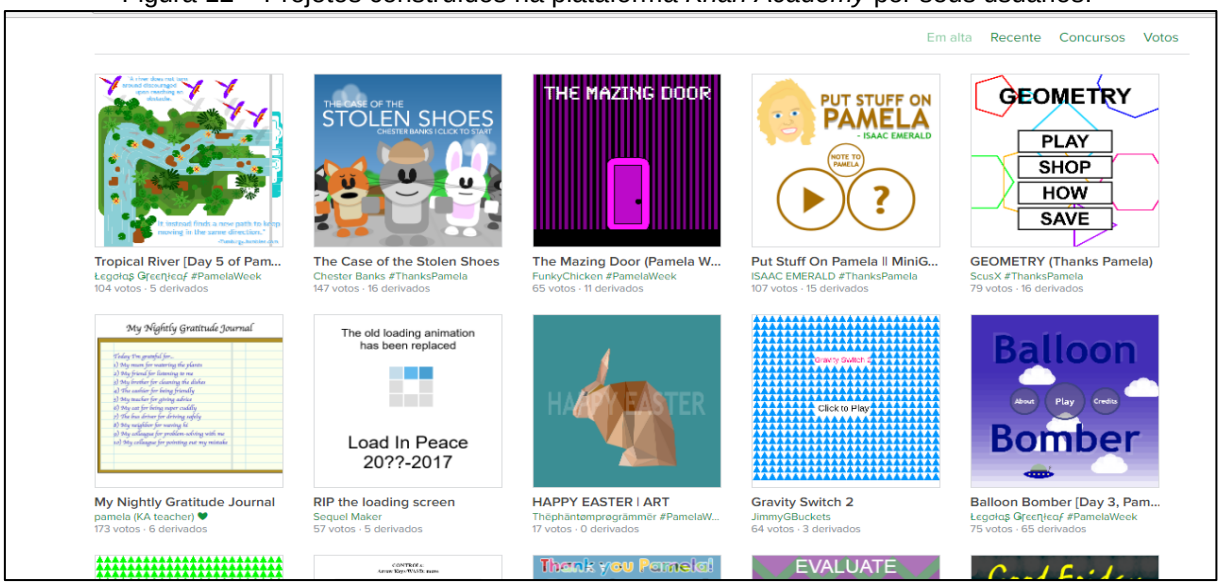


Fonte: *Khan Academy* (2017).

Existe a possibilidade, também, do estudante/professor/pai participar de “Discussões”. Neste menu aparecem as abas “Perguntas”, “Respostas”, “Comentários” e “Dicas e agradecimentos”. Com estas participações, também se consegue receber medalhas.

Na aba “Projetos”, os estudantes podem ver projetos criados por outras pessoas na *Khan Academy* e a partir disso pesquisar mais sobre área de Programação, caso o usuário, tenha também é possível ver seus projetos (Figura 12).

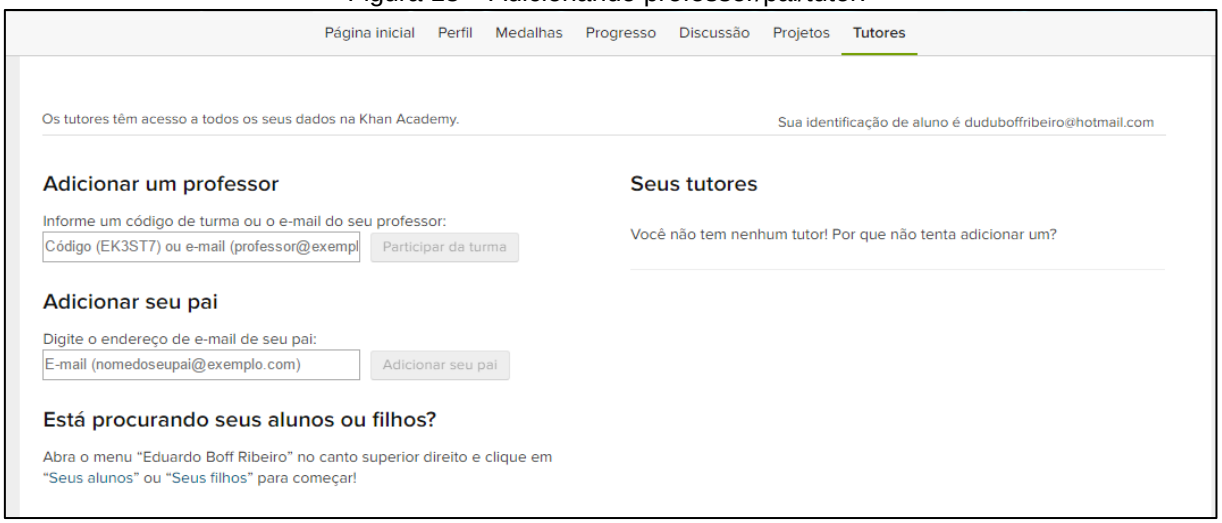
Figura 12 – Projetos construídos na plataforma *Khan Academy* por seus usuários.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Outra ferramenta da plataforma é a de tutores. Como já foi mencionado, o estudante pode ter um tutor, e na guia “tutores” o estudante pode adicionar um professor (Figura 13) ou seus pais para que eles acompanhem seu desenvolvimento. Nesta pesquisa foi usada esta ferramenta, criando uma turma com a finalidade de monitorar e realizar indicações de atividades para aperfeiçoamento do estudante em determinado conteúdo.

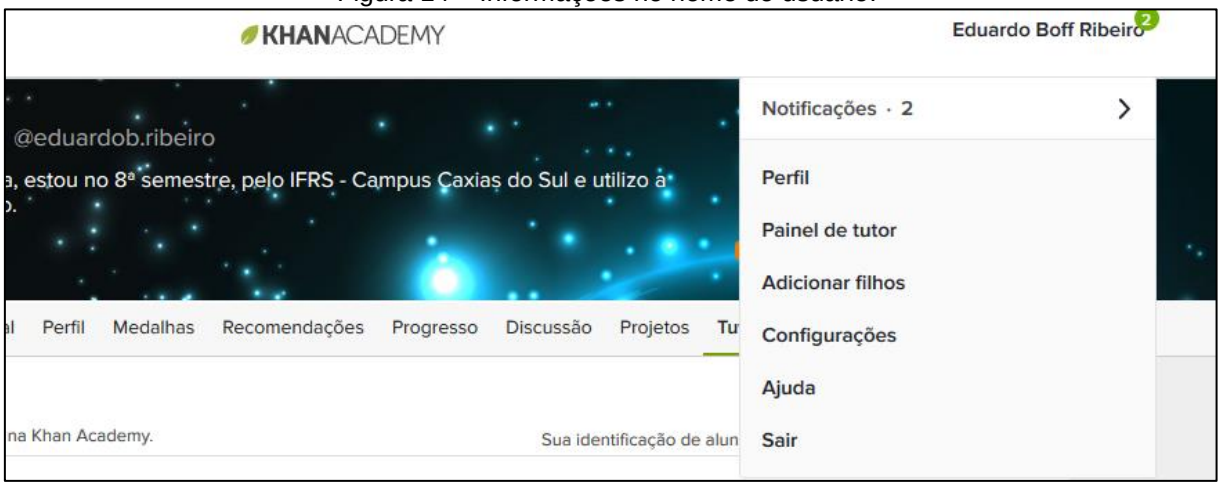
Figura 13 – Adicionando professor/pai/tutor.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

No canto superior direito, onde aparece o nome do usuário (Figura 14), ao clicar aparecem as notificações de medalhas, indicações de estudos e outras notificações, assim como “Perfil”, “Perfil tutor”, “Adicionar filhos”, “Configurações”, “Ajuda” e “Sair”.

Figura 14 – Informações no nome do usuário.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Caso hajam alunos adicionados, é possível acompanhar o desenvolvimento deles em “Painel de tutor”. Na próxima seção será descrito como este tópico pode ser usado por professores ou pais.

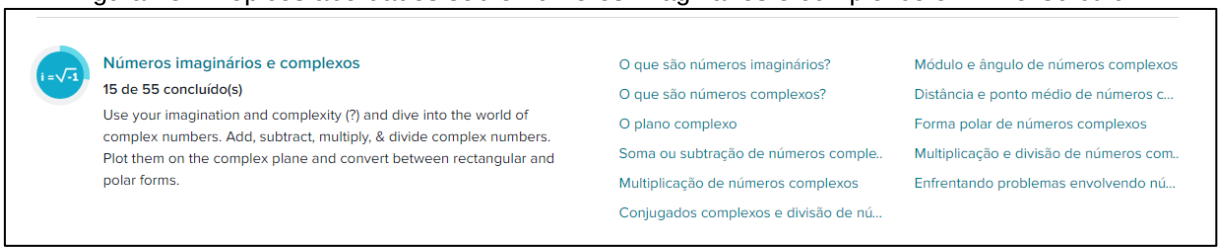
Como já mencionado, a plataforma conta com um acervo na área de Matemática, incluindo textos explicativos, exercícios, desafios e vídeos. No momento da busca pelo

assunto, o estudante pode procurar na guia “Pesquisar”, colocando palavras referentes à determinado assunto. Por exemplo, no tópico “Pré-Cálculo” o estudante pode estudar:

- Identidades e equações trigonométricas;
- Seções cônicas;
- Vetores;
- Matrizes;
- Números imaginários e complexos;
- Probabilidade e análise combinatória;
- Progressões, séries e indução matemática.

Além disso, é mostrado ao estudante quais tópicos são abordados dentro destes conteúdos (Figura 15). Na plataforma existem vários níveis de dificuldade, desde arranjos de vários conteúdos mais simples e mais superficiais, aos mais avançados. Nesta pesquisa, os tópicos a serem abordados com as turmas encaixam-se em “Pré-Cálculo”.

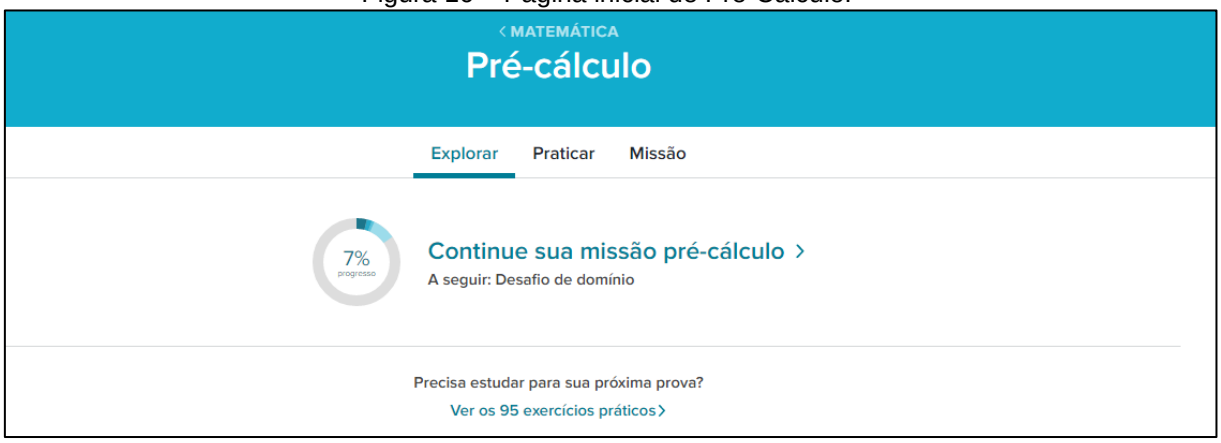
Figura 15 – Tópicos abordados sobre números imaginários e complexos em “Pré-Cálculo”.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Como pode ser visto na Figura 15, alguns títulos ainda estão em inglês, pois a plataforma ainda não está 100% traduzida para o português, mas o material (vídeos, exercícios e textos) está em português. No topo da página de Pré-Cálculo (Figura 16), aparece a porcentagem concluída deste tópico, a quantidade de exercícios disponíveis para este assunto, e três opções fornecidas ao estudante: “Explorar”, “Praticar” e “Missão”.

Figura 16 – Página inicial de Pré-Cálculo.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Em “Pré-Cálculo > Explorar”, o estudante escolhe um dos tópicos já mencionados, ou subtópicos. Ao escolher, o estudante é direcionado a uma página daquele tópico. Por exemplo, em “Números Complexos e Imaginários” (Figura 17), o estudante poderá ter uma visão geral deste tópico, com todos os conteúdos (ao lado esquerdo). Na aba “Praticar”, são expostos ao estudante todos os exercícios praticáveis desta seção.

Figura 17 – Tópico sobre números imaginários e complexos.

Fonte: *Khan Academy* (2017).

Ao longo da organização de cada tópico existem símbolos, descritos no Quadro 2.

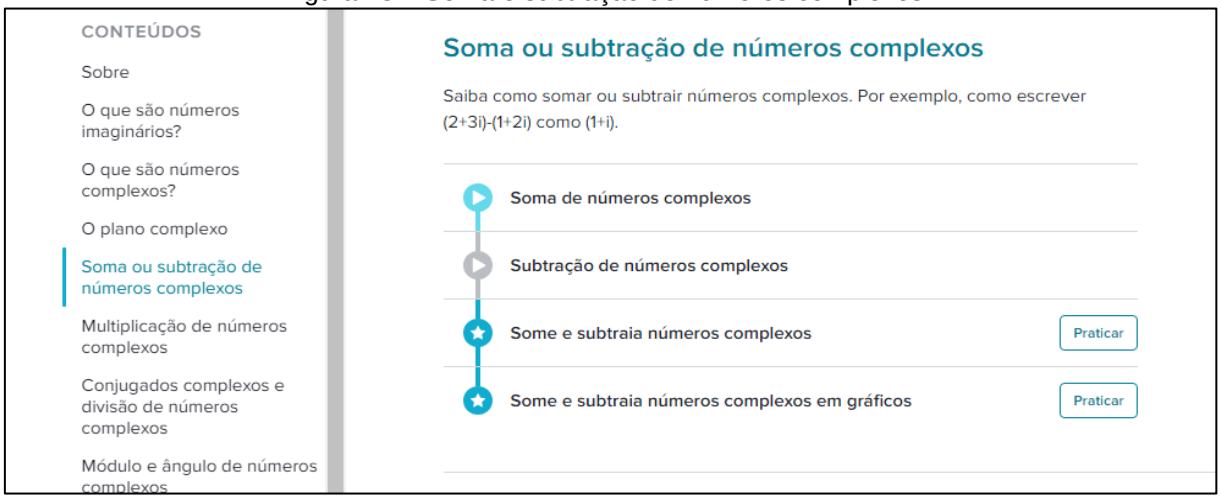
Quadro 2 – Símbolos existentes nos tópicos de cada assunto.

Símbolo	Descrição
	Vídeo
	Leitura
	Praticar

Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

Em cada conteúdo destes apresentados ao lado esquerdo, estão disponíveis uma explicação sucinta e o material disponível sobre este tópico (Figura 18).

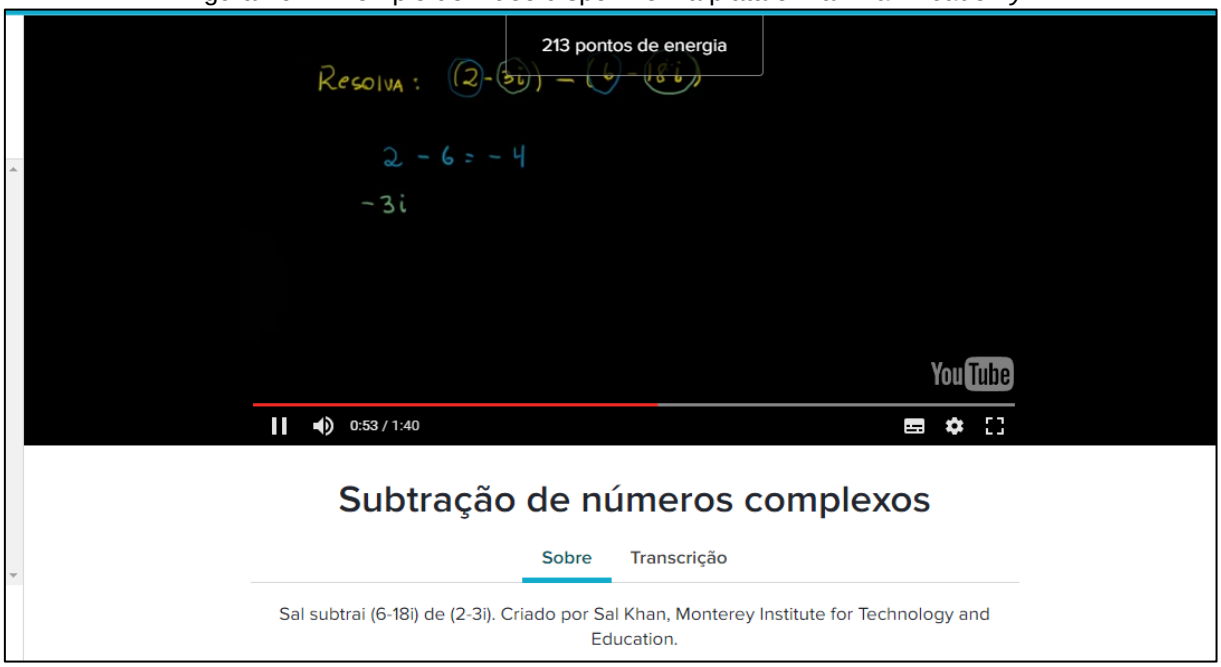
Figura 18 – Soma e subtração de números complexos.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Por exemplo, a partir da imagem pode-se perceber que existe um vídeo sobre soma e subtração de números complexos (Figura 19) e exercícios para praticar (Figura 20). As cores indicadas significam: azul escuro – concluída; azul claro – parcialmente concluída; cinza – não iniciado.

Figura 19 – Exemplo de vídeo disponível na plataforma *Khan Academy*.



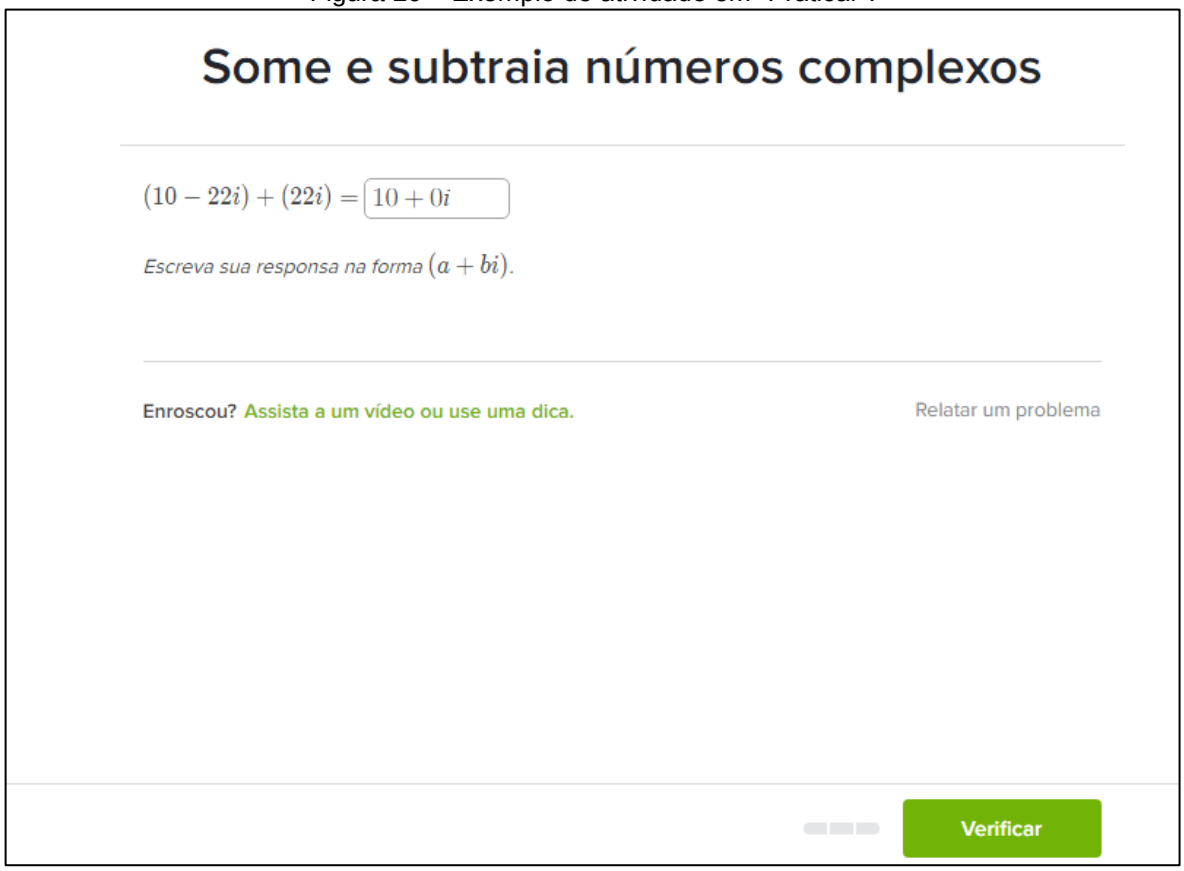
Fonte: *Khan Academy* (2017).

Conforme o estudante vai assistindo um vídeo, são mostrados os pontos de energia obtidos por estar assistindo e, abaixo dos vídeos, existem perguntas e respostas sobre o vídeo, podendo o estudante participar destas discussões. Também é possível consultar a duração do vídeo, que no caso da Figura 19 é de 1 minuto e 40 segundos. A curta duração dos vídeos, se dá pelo fato de que, no início, o YouTube possuía regras de tempo. Para a *Khan Academy* foi um ponto positivo pois, após estudos foi possível perceber que o tempo

de concentração do estudante variava entre 10 a 18 minutos (*KHAN ACADEMY*, 2012). Os vídeos também possibilitam ao estudante rever várias vezes, pausar, controlando de acordo com sua necessidade.

O estudante pode realizar atividades de prática, por exemplo, sobre soma e subtração de números complexos, a fim de testar seus conhecimentos sobre este tópico (Figura 20).

Figura 20 – Exemplo de atividade em “Praticar”.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

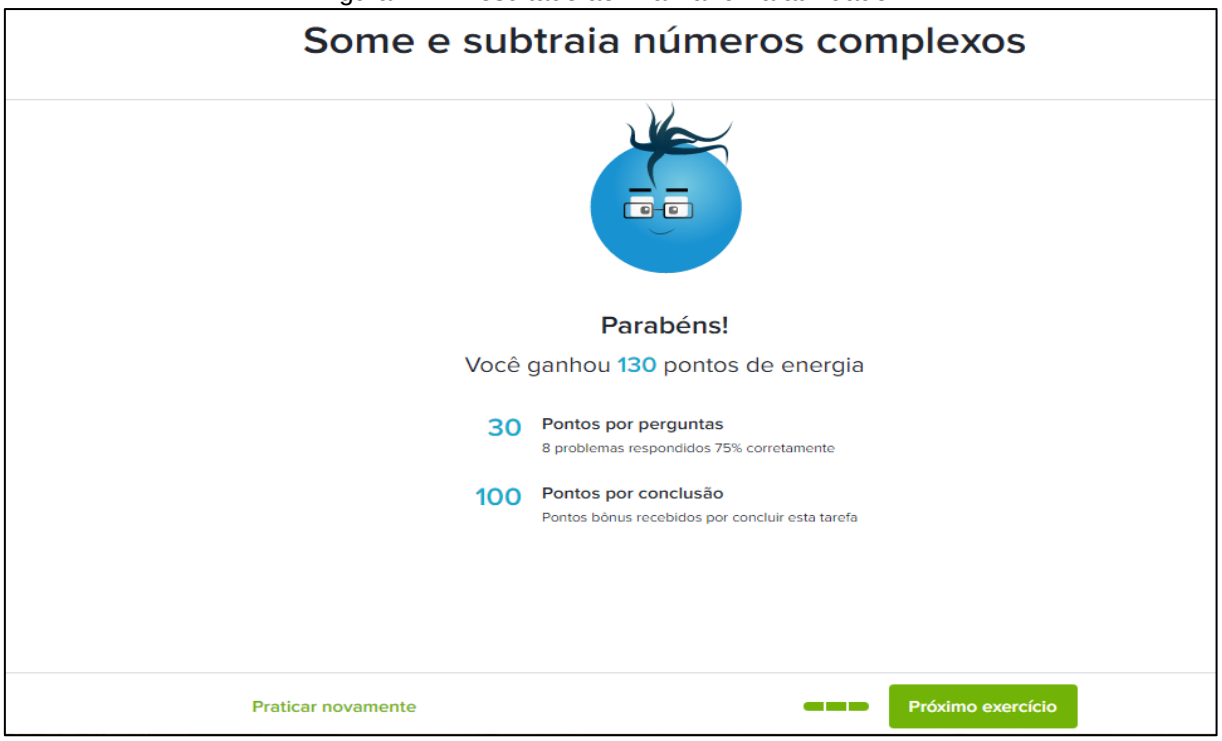
Quando o estudante realiza o exercício e clica em verificar, a própria plataforma corrige a atividade (Figura 21). Dependendo do tempo de realização do exercício, ou se o estudante errar precisará cumprir algumas atividades em sequência propostas pela plataforma. Caso o estudante não consiga desenvolver a questão, é possível assistir vídeos sobre a questão, bem como obter dicas sobre a mesma. O objetivo é que o estudante entenda o conteúdo envolvido.

Figura 21 – Verificando o exercício de soma e subtração de complexos.

Fonte: *Khan Academy* (2017).

Ao verificar as atividades e em outras situações, são emitidos efeitos sonoros para o estudante. Ao se completar as atividades é mostrado o seu avatar (Figura 22), pontos de energia obtidos, pontos por perguntas e por conclusão.

Figura 22 – Resultado ao finalizar uma atividade.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Observe que são mencionados o número de problemas respondidos e a porcentagem de acertos. Mesmo o estudante errando o exercício, a plataforma não realiza

qualquer tipo de punição, e sim instiga que ele prossiga com seus estudos. Também se percebe que o estudante pode praticar novamente, principalmente para estudar para uma prova, ou aperfeiçoar ainda mais os seus conhecimentos. É importante salientar que os exemplos apresentados para cada aluno são diferentes. Assim, caso o estudante deseje praticar novamente, normalmente são propostos outros exercícios pela plataforma. O estudante decide o quanto deseja fazer, desenvolvendo sua autonomia.

Ainda na guia “Praticar”, aparecem os exercícios dos tópicos daquela seção, agilizando o processo de encontrar as atividades. Em “Missão”, o estudante pode realizar missões sobre os conteúdos, as quais são organizadas por seção e não sobre cada tópico. Em “Pré-Cálculo > Missão” (Figura 23), aparecem o progresso do estudante, o desafio, as atividades para praticar e o status das habilidades.

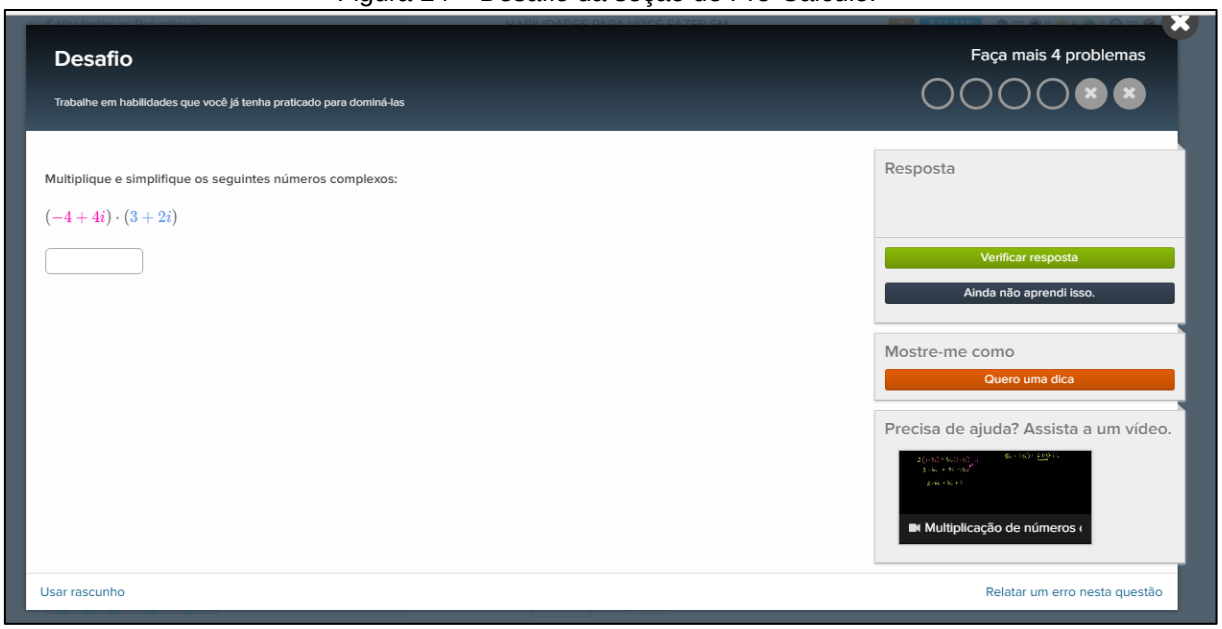
Figura 23 – Página da missão de Pré-Cálculo.

Fonte: *Khan Academy* (2017).

A seguir explicitam-se separadamente os itens que aparecem na página “Missão”. O progresso é a combinação do percentual de todas as atividades desenvolvidas daquela seção e é composto pelas suas habilidades, as quais têm níveis: “Dominadas”, que se referem a situações em que o estudante domina aquela habilidade; “Nível 1” e “Nível 2” referem-se ao nível que estão os estudantes, pois no modo missão, as questões aumentam de dificuldade, além da plataforma considerar o tempo de resolução do exercício, o quantitativo de questões realizadas (acertos e erros) e “Praticadas”. Para uma habilidade ser considerada “Dominada”, Nível 2, Nível 1 é necessário que o estudante realize o desafio, que funciona como um teste sobre as atividades praticadas. Entretanto, para o estudante podem não aparecer situações para praticar na página de missão. Então ele pode adicionar e para isso deve procurar o tópico e clicar sobre, aparecendo a mensagem “você adicionou”. Para o aluno, na página da missão, também são mostradas as atividades realizadas e as próximas medalhas a serem conquistadas.

No desafio (Figura 24), o número de questões é variável, dependendo dos tópicos praticados. Os desafios não são separados por assunto, e sim por atividades praticadas em toda a seção. Assim o estudante não cansa realizando só um tipo de conteúdo, podendo revisar outros conteúdos, assistir vídeos de tópicos que não aprendeu, ver uma dica ou utilizar o rascunho. É possível, até mesmo, relatar se houver um erro na questão.

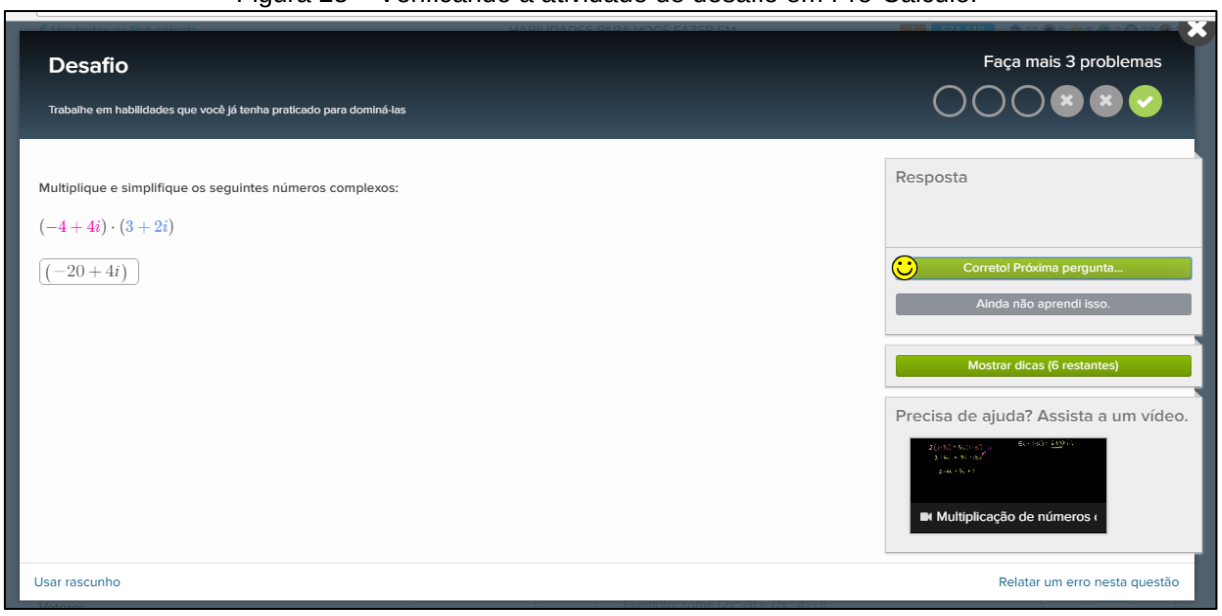
Figura 24 – Desafio da seção de Pré-Cálculo.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Após verificar a atividade (Figura 25), a plataforma dá a opção do estudante prosseguir com o desafio, caso tenha acertado a mesma. Em caso de erro, o estudante pode tentar novamente até acertar e conta com opções de dicas e vídeos sobre o assunto tratado no exercício, facilitando o entendimento do exercício.

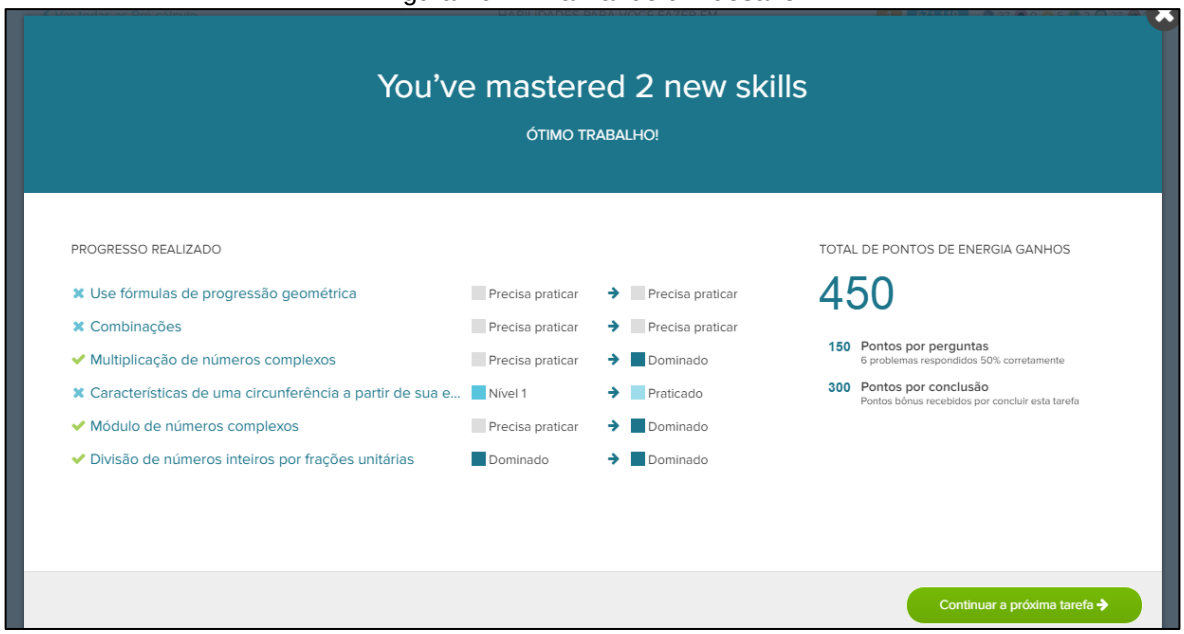
Figura 25 – Verificando a atividade de desafio em Pré-Cálculo.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Ao final do desafio (Figura 26) são mostrados os pontos de energia, as habilidades desenvolvidas, bem como a relação dos níveis.

Figura 26 – Finalizando um desafio.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

É importante analisar as informações da Figura 26 mais minuciosamente, pois nela aparecem todos os tópicos abordados pelo desafio. No tópico "Multiplicação de números complexos" o estudante estava com o status "precisa praticar" e passou diretamente para a habilidade "dominada". Entretanto, na atividade "Características da Circunferência..." o estudante estava no "nível 1" e regrediu para "praticado". Isto acontece porque a plataforma considerou que é necessário um novo desafio, pois a aprendizagem daquele tópico não foi satisfatória. Pode haver mais do que um desafio dependendo da quantidade de atividades praticadas. Entretanto, o estudante não pode ficar realizando o tempo inteiro os desafios, pois pode ficar sobrecarregado. Assim, ao finalizar um desafio o aluno pode realizar outro disponível ou consultar em quanto tempo estará disponível o próximo desafio. Na próxima seção será explicado como o professor tem acesso a estas informações e como estas podem ser utilizadas para o monitoramento da aprendizagem (resultados sobre atividades de recomendação, utilização da plataforma nos tempos destinados a ela, avaliação processual) dos conceitos envolvidos.

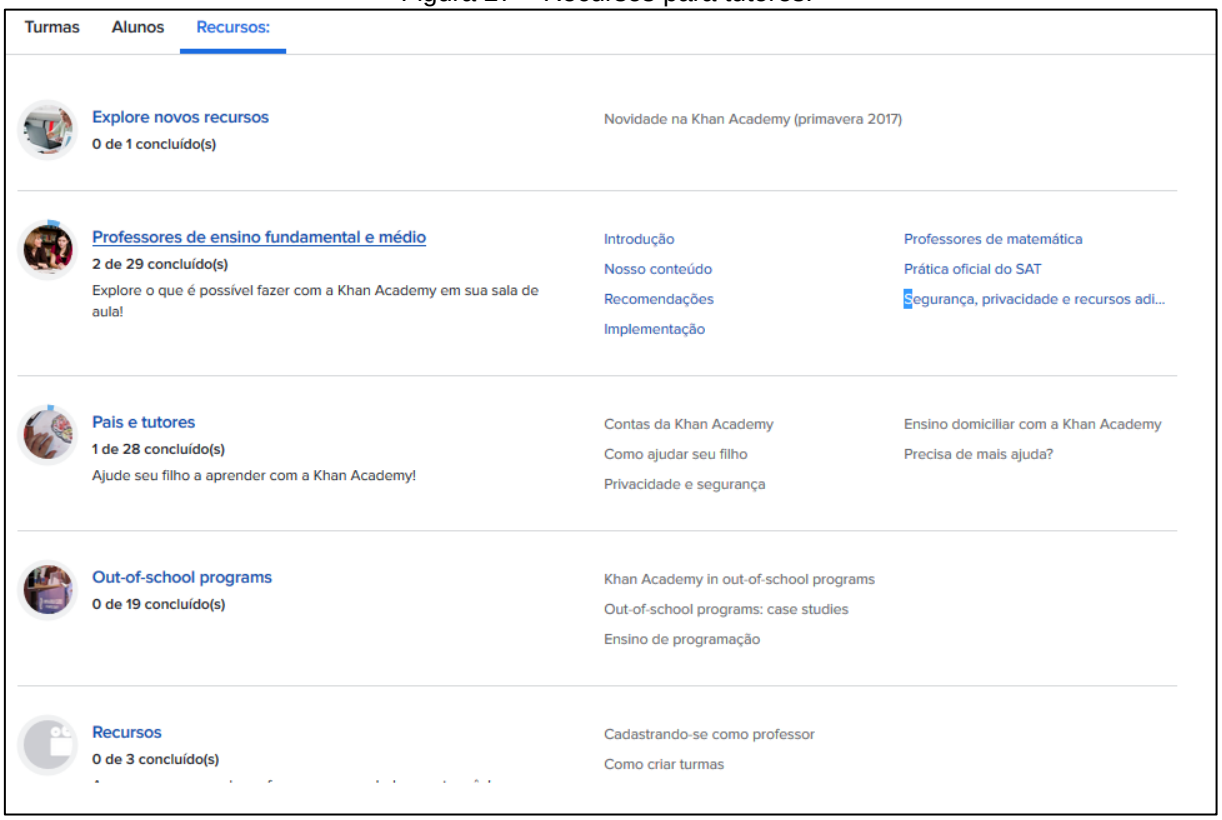
3.5 PERFIL PROFESSOR OU PAIS

Esta seção está relacionada com a anterior, pois as informações tanto dos estudantes, como dos tutores têm acesso. Isto ocorre apenas quando o professor adiciona seus alunos, sendo possível verificar o andamento da aprendizagem e das atividades

desenvolvidas. A plataforma encontra-se em constantemente atualização, e uma prevista está relacionada à indicação de recomendações para os estudantes, que segundo aviso, estará disponível apenas até o final de novembro de 2017.

Em “Painel do Tutor” existem três abas: “Turmas”, “Alunos”, “Recursos”. Começaremos com a aba “Recursos” onde o tutor (pai ou professor) pode conhecer e aprender a utilizar os recursos da *Khan Academy* para melhor aproveitamento (Figura 27).

Figura 27 – Recursos para tutores.

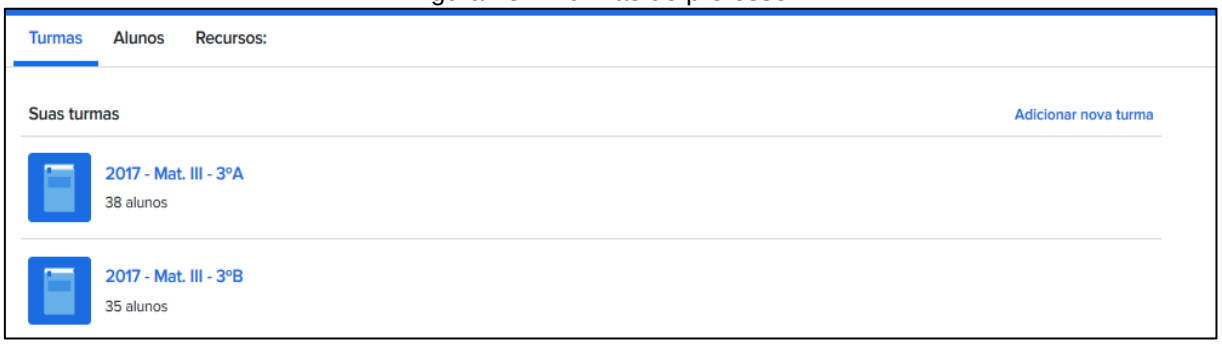


Fonte: *Khan Academy* (2017).

Na aba “Alunos” está disponível a relação de todos os seus alunos e classe a qual este pertence; nesta aba é possível adicioná-los e excluí-los.

Na aba “Turmas” o professor tem acesso às suas turmas (Figura 28), onde também é possível adicionar uma nova turma.

Figura 28 – Turmas do professor.

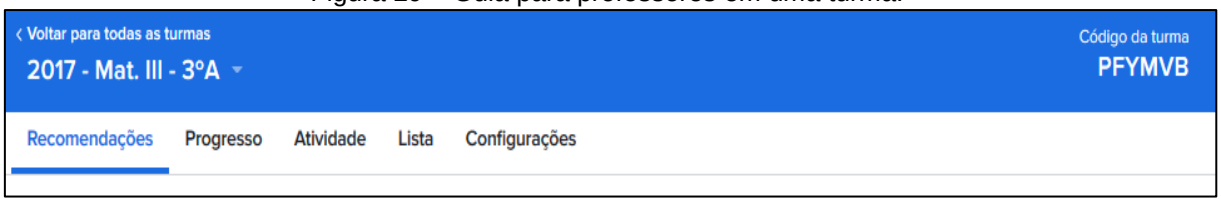


Fonte: *Khan Academy* (2017).

Ao adicionar uma nova turma o professor deve inserir um nome que a identifique (ou realizar a sincronização com o Google Sala de Aula), escolher os assuntos da turma e, após a escolha, são mostrados ao professor modos de adicionar estudantes. Uma forma é utilizar o código da turma, onde o estudante realiza a sua auto inscrição na turma, o que facilitaria para o professor que trabalha com várias turmas e/ou com turmas grandes. Em referência aos assuntos da turma, um dos tópicos disponíveis é denominado “Mundo da Matemática”, que compreende toda a Matemática.

Em cada turma, o professor possui um guia (Figura 29) contendo informações das recomendações, do progresso dos estudantes, do acesso aos estudantes, lista de estudantes e configurações.

Figura 29 – Guia para professores em uma turma.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

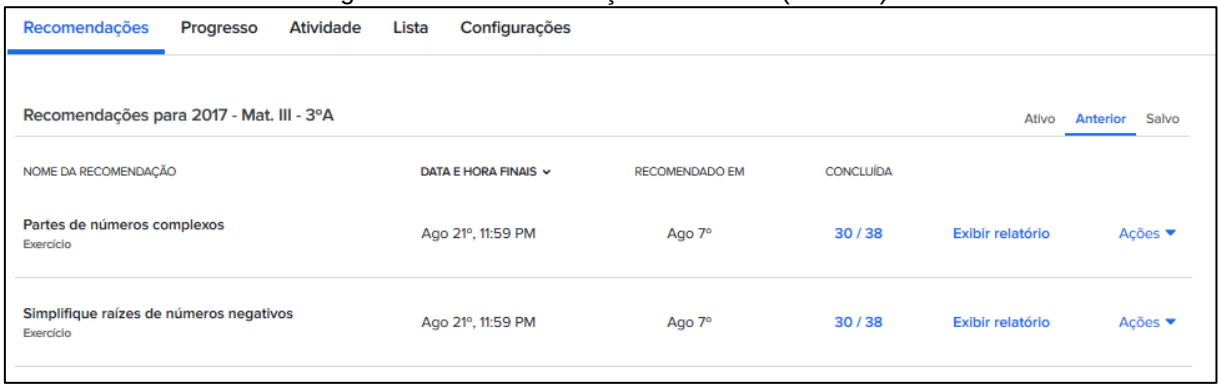
Em “Recomendações” (Figura 30) o professor pode conferir as recomendações dadas a seus alunos e informações sobre ela, como “Nome”, “Data da recomendação”, “Prazo da recomendação”, “Informações de alunos concluintes”, “Relatórios da atividade” e “ações”.

Figura 30 – Recomendações da turma.

Fonte: *Khan Academy* (2017).

As recomendações são separadas em três grupos: “Ativo”, se o prazo ainda não foi encerrado, “Anterior” (Figura 31), se o prazo já foi encerrado e “Salvo” no caso do professor ter salvo uma recomendação da plataforma, mas ainda não ter recomendado.

Figura 31 – Recomendações da turma (anterior).

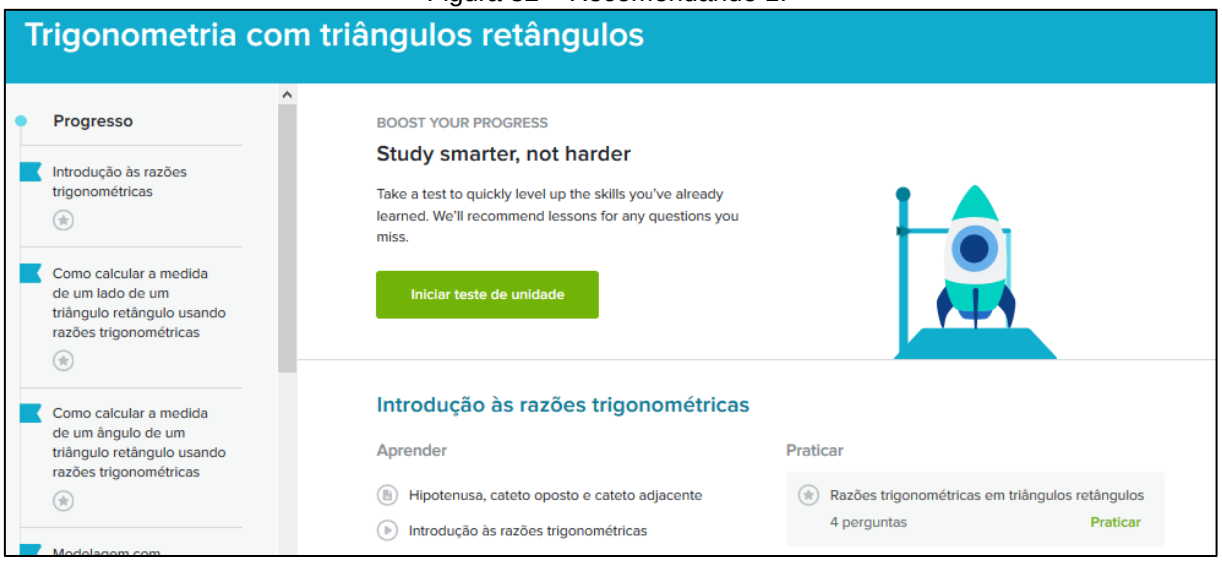


Fonte: *Khan Academy* (2017).

Mesmo que o prazo da atividade seja encerrado, os alunos podem realizá-la. Nas informações dos estudantes concluintes constará a data de conclusão da atividade por aluno.

Para o professor realizar uma recomendação, este deve escolher um assunto ou pesquisa um conteúdo de seu interesse. Em um exemplo de recomendação de uma atividade de prática, o professor acessa “Assuntos>Trigonometria>Trigonometria” com “Triângulos retângulos” em “Introdução às razões trigonométricas” (Figura 32), que tem a atividade de praticar “Razões trigonométricas em triângulos retângulos”.

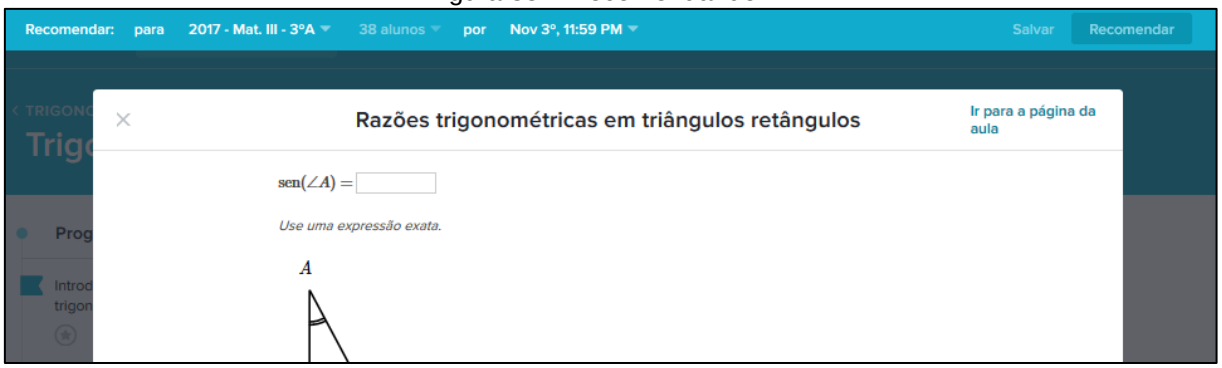
Figura 32 – Recomendando 1.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Ao clicar sobre a atividade aparecerá um menu de recomendação na parte superior (Figura 33) onde o professor escolhe a turma, a quantidade de alunos (podendo escolher alguns específicos dessa turma), o prazo e a opção recomendar ou deixar salvo para quando precisares.

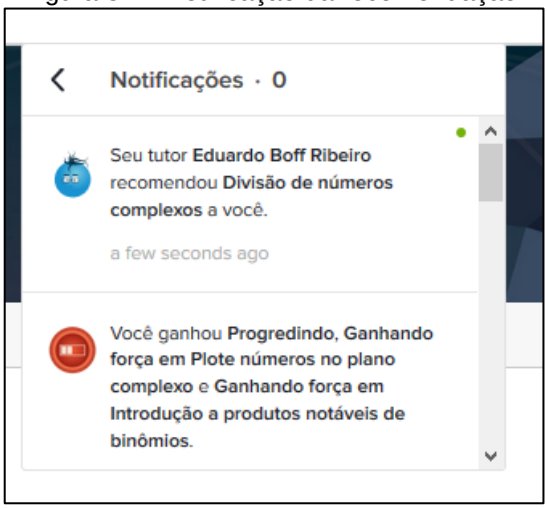
Figura 33 – Recomendando 2.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Dada uma recomendação em “ações”, o professor pode editá-la, copiá-la ou excluí-la. Ao dar uma recomendação, o estudante recebe uma notificação sobre as recomendações (Figura 34).

Figura 34 – Notificação da recomendação.

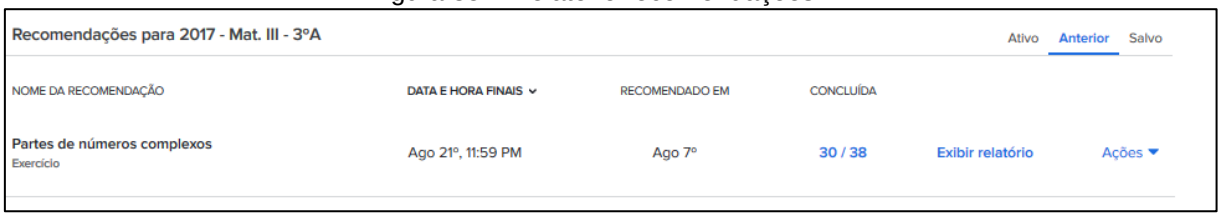


Fonte: *Khan Academy* (2017).

Ao escolher o estudante, da mesma forma que já foi descrito na seção anterior para o perfil do estudante, também é possível ver um resumo sobre suas habilidades, vídeos assistidos, medalhas, atividades e foco.

Para analisar uma recomendação deve-se clicar sobre as informações dos estudantes que a concluíram (Figura 35).

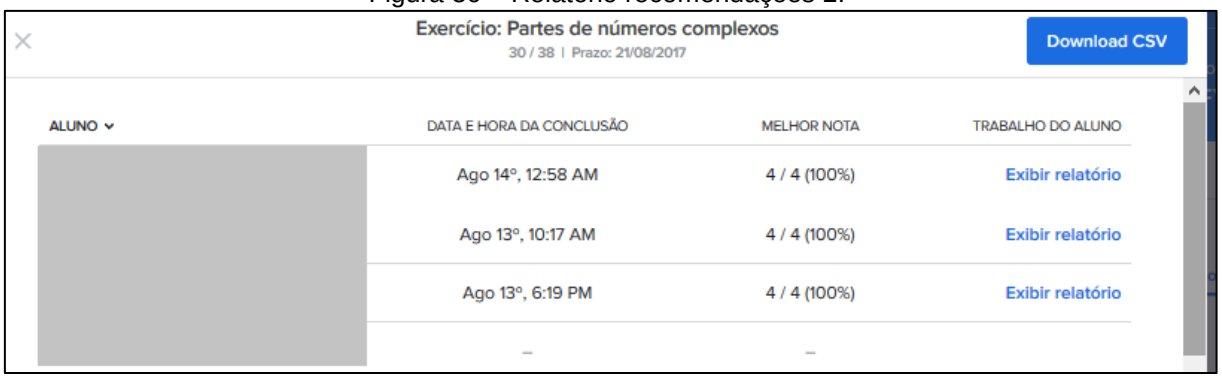
Figura 35 – Relatório recomendações 1.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Pode-se notar na Figura 36 que estão disponíveis a identificação do estudante, a data de conclusão, e o melhor aproveitamento dele.

Figura 36 – Relatório recomendações 2.

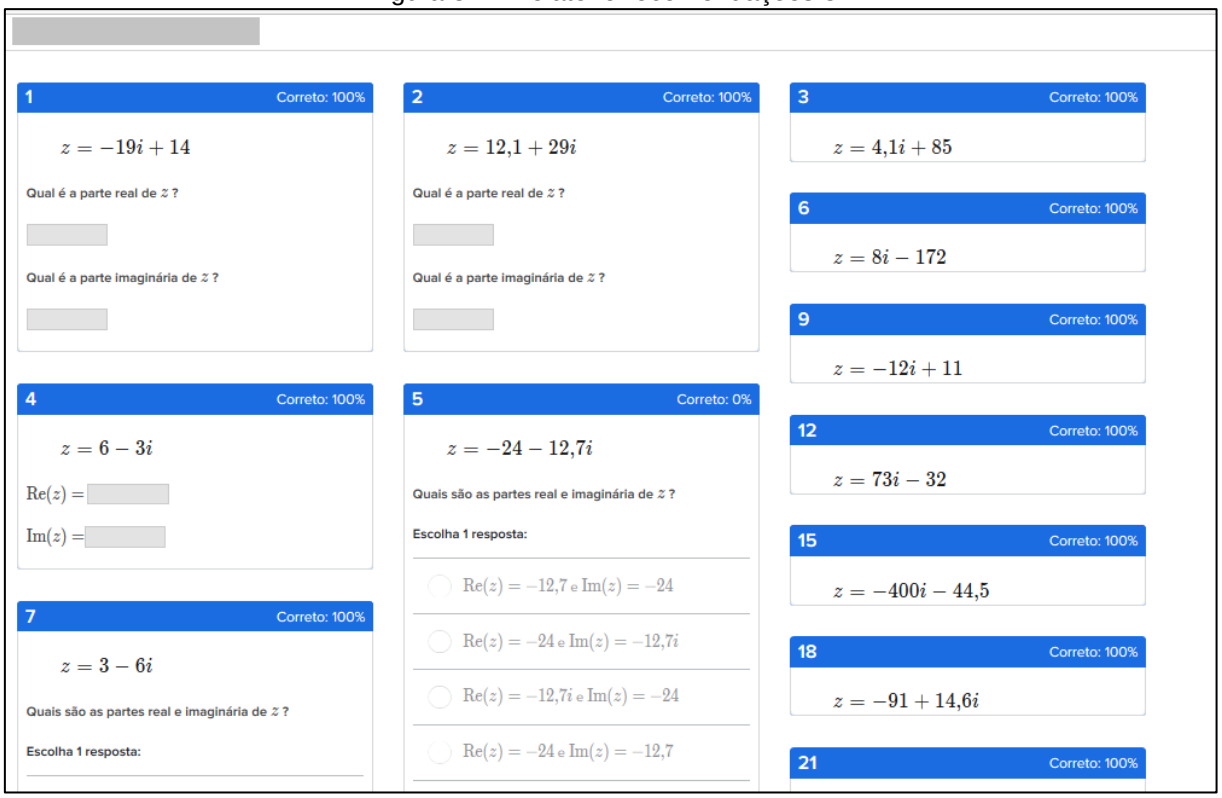


Fonte: *Khan Academy* (2017).

Em “exibir relatório”, o professor tem acesso às questões que esse aluno resolveu (Figura 37), podendo ver em que tipo de questões o mesmo está tendo mais dificuldade. Ao

mesmo tempo, isso deve auxiliar o professor na criação de exercícios e também no processo de avaliação.

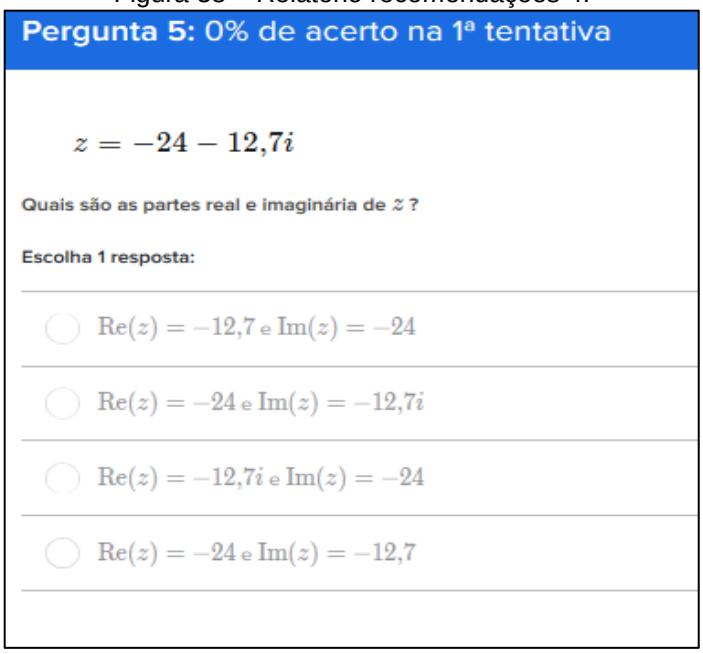
Figura 37 – Relatório recomendações 3.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

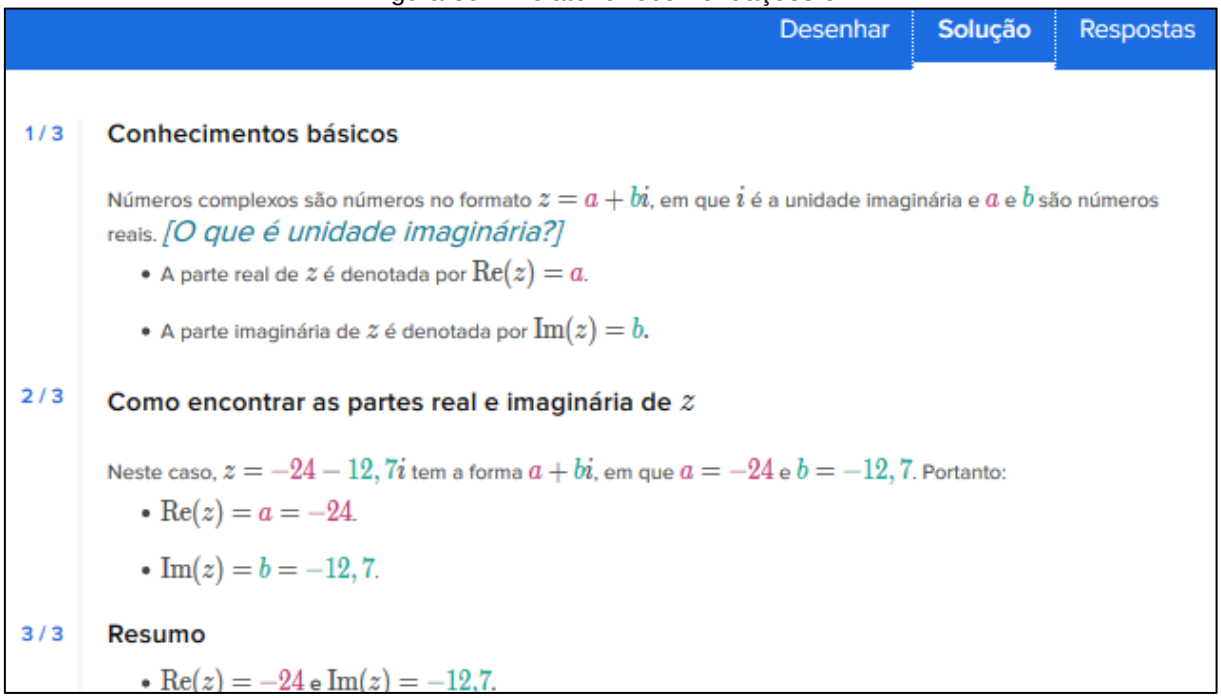
Ao clicar sobre uma das questões, o professor tem acesso à questão (Figura 38), à ferramenta desenhar (para ele fazer a resolução em rascunho), à solução passo a passo (Figura 39), ao número de tentativas do estudante e ao uso de dicas.

Figura 38 – Relatório recomendações 4.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Figura 39 – Relatório recomendações 5.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

O professor, em cada recomendação, pode fazer o download de uma planilha (.CSV) contendo as informações, a qual deve ser aberta, preferivelmente com o uso do LibreOffice ou do OpenOffice. Ao ser aberto nesse programa é necessário realizar a importação separando por vírgulas. Os quadros 3 e 4 representam um excerto dessa planilha.

Quadro 3 – Relatório recomendação (parte I).

Recomendação	Nome do aluno	Pontuação na data final	Melhor pontuação agora	Pontos possíveis	Nºs de tentativas
Divida polinômios	Aluno A	4	4	4	4
Divida polinômios	Aluno B	4	4	4	2
Divida polinômios	Aluno C	4	4	4	2
Divida polinômios	Aluno D	3	3	4	1

Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

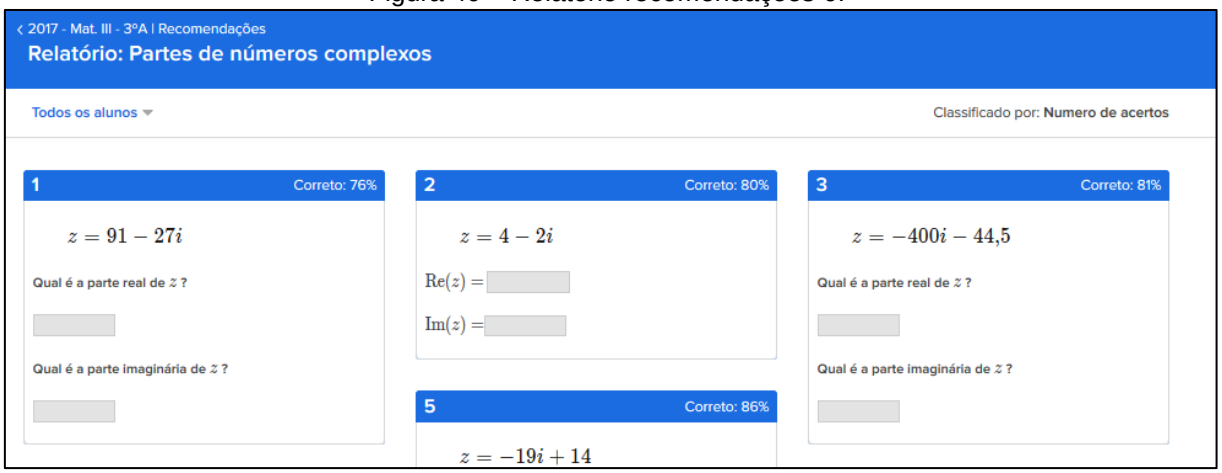
Quadro 4 – Relatório recomendação (parte II).

Data de conclusão	Data final	URL da recomendação	Tipo de recomendação
Out 11, 9:57PM	Out 16, 10:00PM	Link	Exercício
Out 12, 5:25PM	Out 16, 10:00PM	Link	Exercício
Out 14, 11:25PM	Out 16, 10:00PM	Link	Exercício
Out 15, 3:28PM	Out 16, 10:00PM	Link	Exercício

Fonte: *Khan Academy* (2017).

Caso o professor deseje o relatório de toda a turma em uma determinada recomendação, ou seja, as questões que foram desenvolvidas, ele deve clicar em “Exibir relatório”, de acordo com a Figura 35, para que apareçam as questões e o aproveitamento da turma (Figura 40). Ao clicar sobre uma delas, o professor pode verificar quais os estudantes que responderam e o aproveitamento destes.

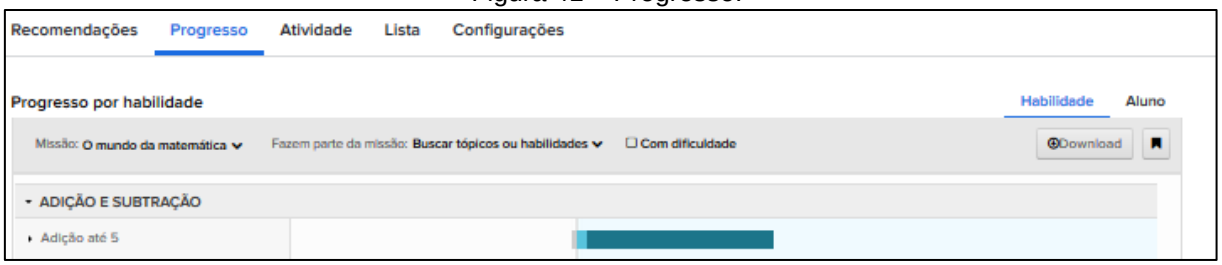
Figura 40 – Relatório recomendações 6.



Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

Clicando sobre o “nome da turma | Recomendações” volta-se ao painel de tutor daquela turma. Outra aba disponível ao professor é “Progresso” (Figura 41), onde se pode verificar o progresso da turma em determinada missão por “Habilidade” ou “por Aluno”, apenas clicando-se na opção desejada no canto superior direito (Figura 41).

Figura 41 – Progresso.

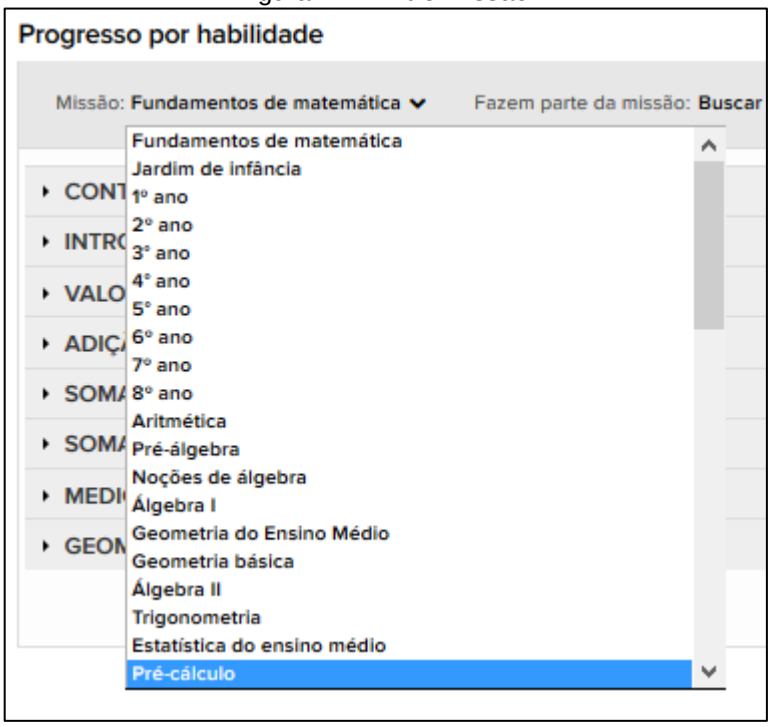


Fonte: *Khan Academy* (2017).

Em “Progresso” é escolhida a missão que se deseja analisar, podendo-se usar os filtros. Para obtenção do status de “praticado” o estudante deve atingir um mínimo de 75% de aproveitamento na recomendação. Por exemplo, pode-se verificar como está o desenvolvimento da turma por habilidade nos tópicos de “Potências da Unidade Imaginária”, em “Números Complexos”, que está na missão “Pré-Cálculo” para aquela turma.

Pode-se encontrar a opção “Pré-Cálculo” na missão Figura 41 e, posteriormente, encontrar “Números Complexos”.

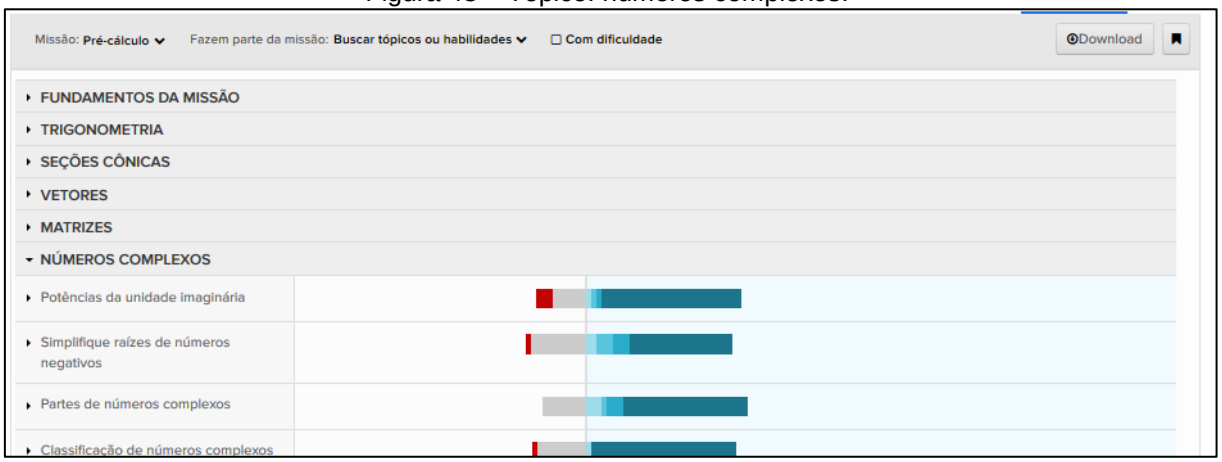
Figura 42 – Filtro missão.



Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

Ao clicar sobre “Números Complexos” (Figura 43), o professor poderá ter um panorama de como está o desenvolvimento da turma. Lá estão expostas barras horizontais, que indicam o progresso do aluno, ponderando “com dificuldade” (em vermelho), “precisa praticar” (em cinza), e em quatro tons de azul do mais claro ao mais escuro os níveis “praticado”, “nível 1”, “nível 2” e “dominado”.

Figura 43 – Tópico: números complexos.

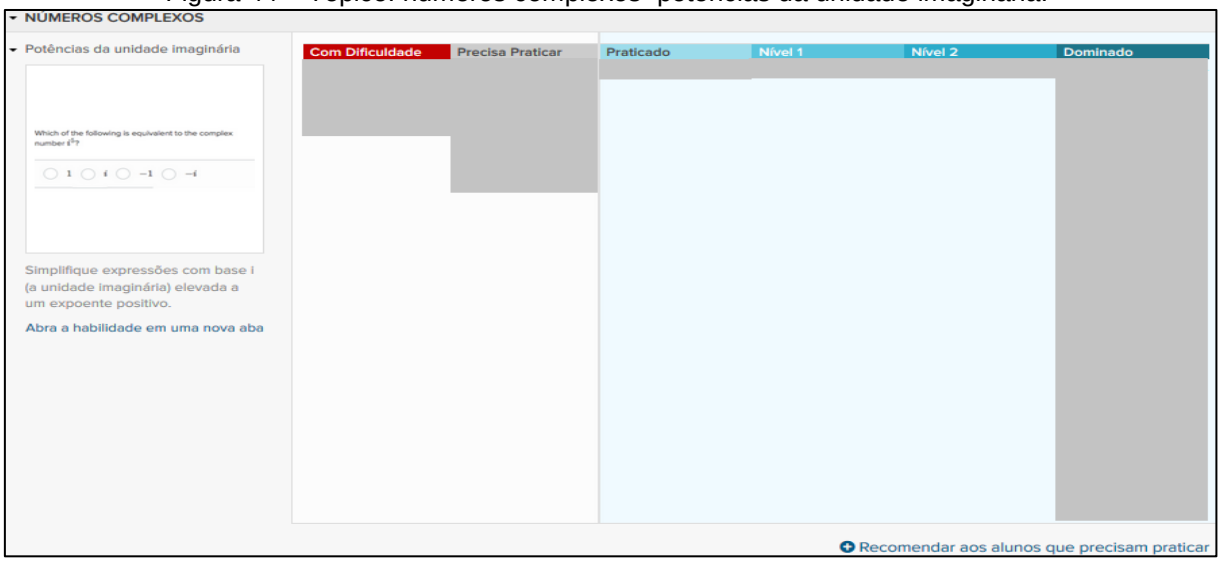


Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

Por exemplo, para o caso ilustrado na figura anterior, uma parte está com a habilidade “Potências da unidade imaginária” dominada, mas em proporção menor quando comparada a “Simplifique raízes de números negativos”. Mas, neste último os tópicos índice de alunos “Com dificuldade” é menor. Ao clicar sobre uma das habilidades, é possível verificar quais são os estudantes que estão em determinado status. Ao clicar sobre

“Potências da unidade imaginária” (Figura 44) também é possível abrir esta atividade em outra aba, verificando o status de progresso dos estudantes, percebendo estudantes que precisam praticar e os que apresentaram dificuldade no desenvolvimento desta atividade, podendo o professor, a partir daí, realizar análises sobre a aprendizagem do estudante de modo contínuo.

Figura 44 – Tópico: números complexos>potências da unidade imaginária.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Uma constatação que pode ser identificada a partir da Figura 44 é a possibilidade, para os estudantes que ainda não praticaram aquela habilidade, de o professor realizar uma recomendação, da mesma forma como visto anteriormente, fazendo com que o estudante perceba que não está desenvolvendo as atividades através de uma notificação.

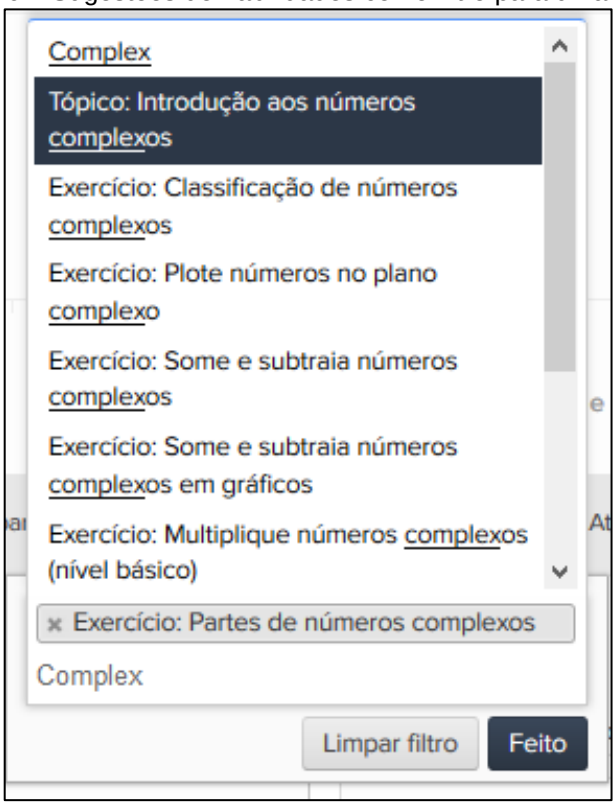
Na aba “Progresso por aluno” (Figura 45), de uma determinada turma, primeiramente aparecerá um gráfico de barras, com o eixo horizontal representando o percentual concluído pelos estudantes e o vertical indicando o número de estudantes que estão naquela missão escolhida. Neste local o professor pode escolher diferentes missões para análise, podendo até selecionar conteúdos dados anteriormente, por exemplo.

Figura 45 – Progresso por aluno.

Fonte: *Khan Academy* (2017).

Em seguida, o professor pode escolher algum nível específico, tal como, percentual de atividades concluídas, habilidades ou tópicos específicos daquela missão escolhida anteriormente. Ao iniciar a digitação no filtro, a plataforma já mostra algumas sugestões (Figura 46) para agilizar o processo.

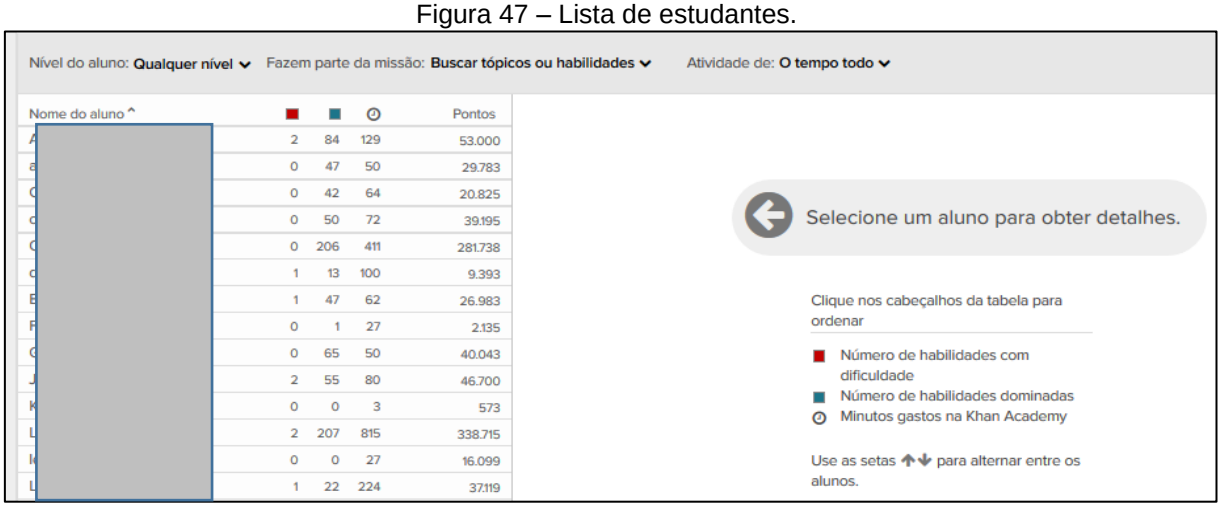
Figura 46 – Sugestões de habilidades como filtro para uma análise.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Além da diversidade de escolhas e possibilidades de análise, é possível escolher um determinado aluno para realizar uma análise individual por meio dos filtros escolhidos. A Figura 47 apresenta uma lista de estudantes da turma escolhida, com algumas informações sobre os estudantes a partir do filtro solicitado.

Figura 47 – Lista de estudantes.

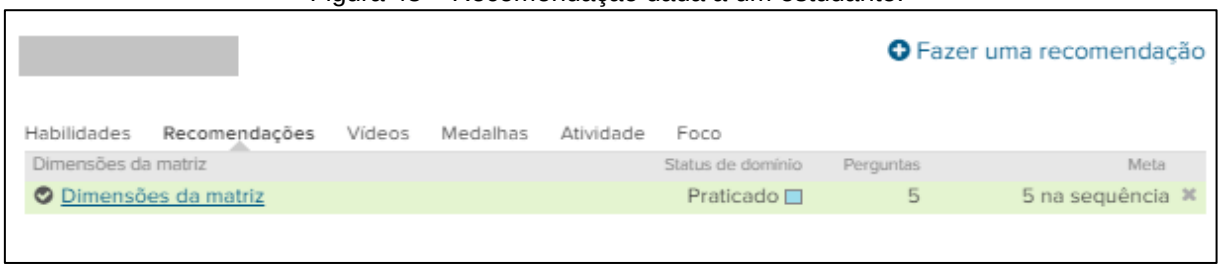


Fonte: *Khan Academy* (2017).

Esta lista é separada em cinco colunas: “Nome”; “Número de habilidades com dificuldade” (quadrado vermelho); “Número de habilidades dominadas” (quadrado azul); “Tempo utilizado” (relógio); e “Pontos ganhos durante estas atividades”. É importante lembrar que, para o estudante dominar uma habilidade, ele deve realizar a missão sobre aquele tópico.

Além disso, o tutor tem acesso às recomendações (Figura 48) que foram dadas ao aluno, podendo ser verificado se ele as seguiu por meio do “Status de domínio”.

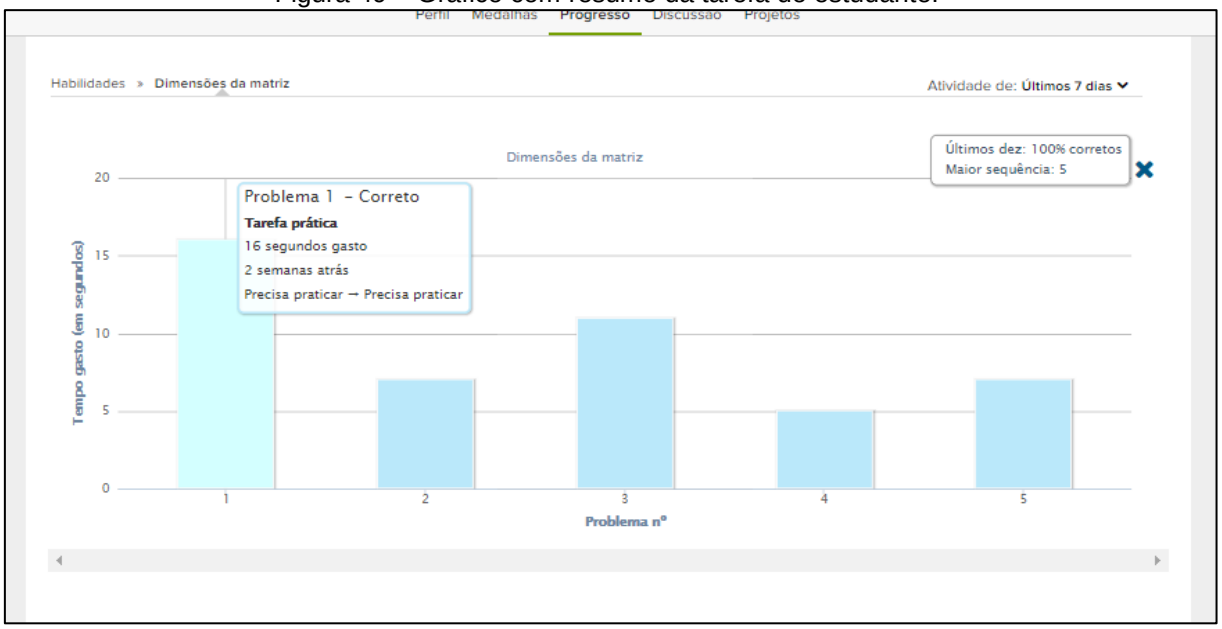
Figura 48 – Recomendação dada a um estudante.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Ao clicar na recomendação dada, o professor é direcionado a um resumo desta tarefa (Figura 49), onde constam informações sobre o número de questões realizadas, a porcentagem de acerto, bem como o uso de dicas e até mesmo o tempo o de realização de cada atividade.

Figura 49 – Gráfico com resumo da tarefa do estudante.

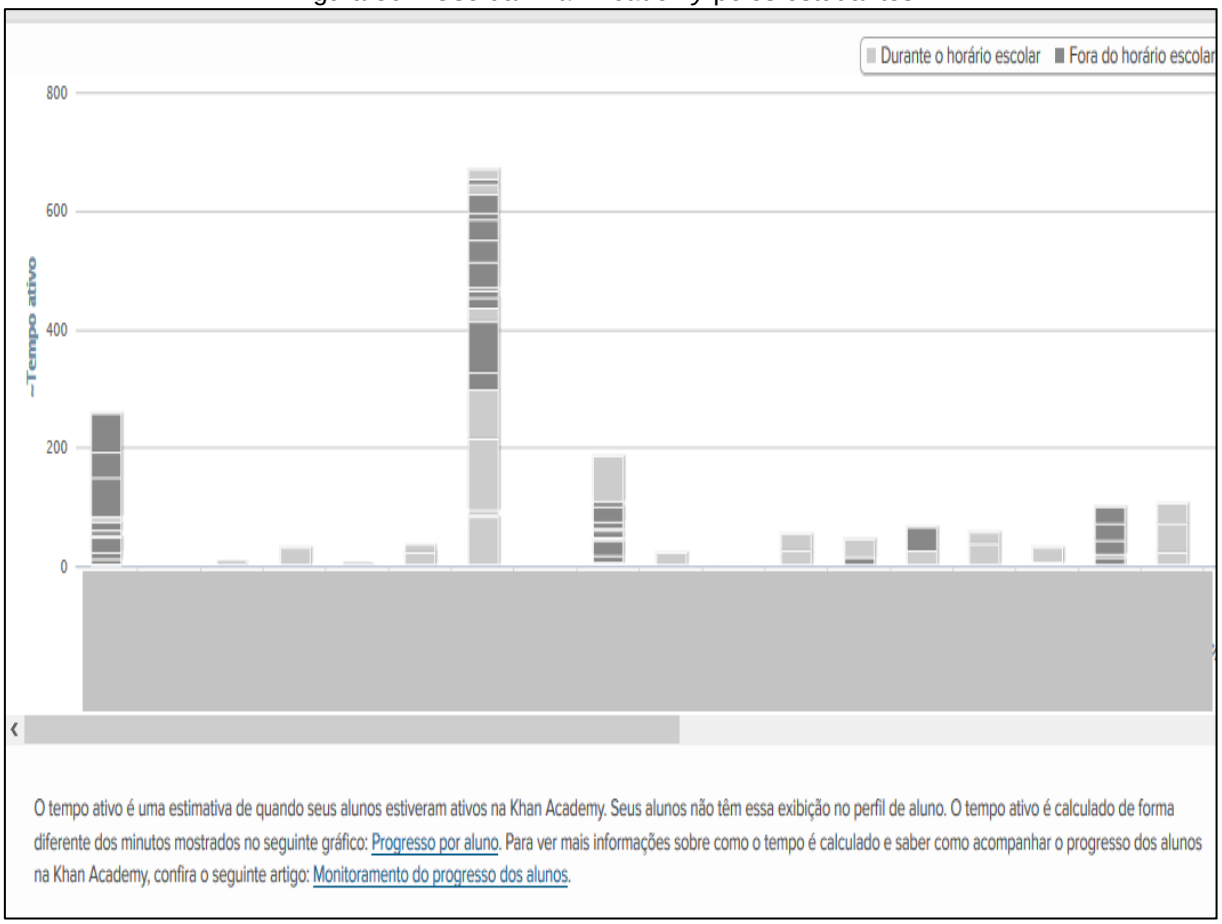


Fonte: *Khan Academy* (2017).

Na guia “Atividade” é possível que o professor verifique o período de tempo em que o estudante esteve ativo na plataforma (Figura 50), se a atividade foi realizada dentro ou fora do horário escolar, bem como o total do tempo, as habilidades e os vídeos assistidos pelo

aluno. Todas estas informações são apresentadas em um gráfico, onde cada barra representa um estudante da turma escolhida.

Figura 50 – Uso da *Khan Academy* pelos estudantes.



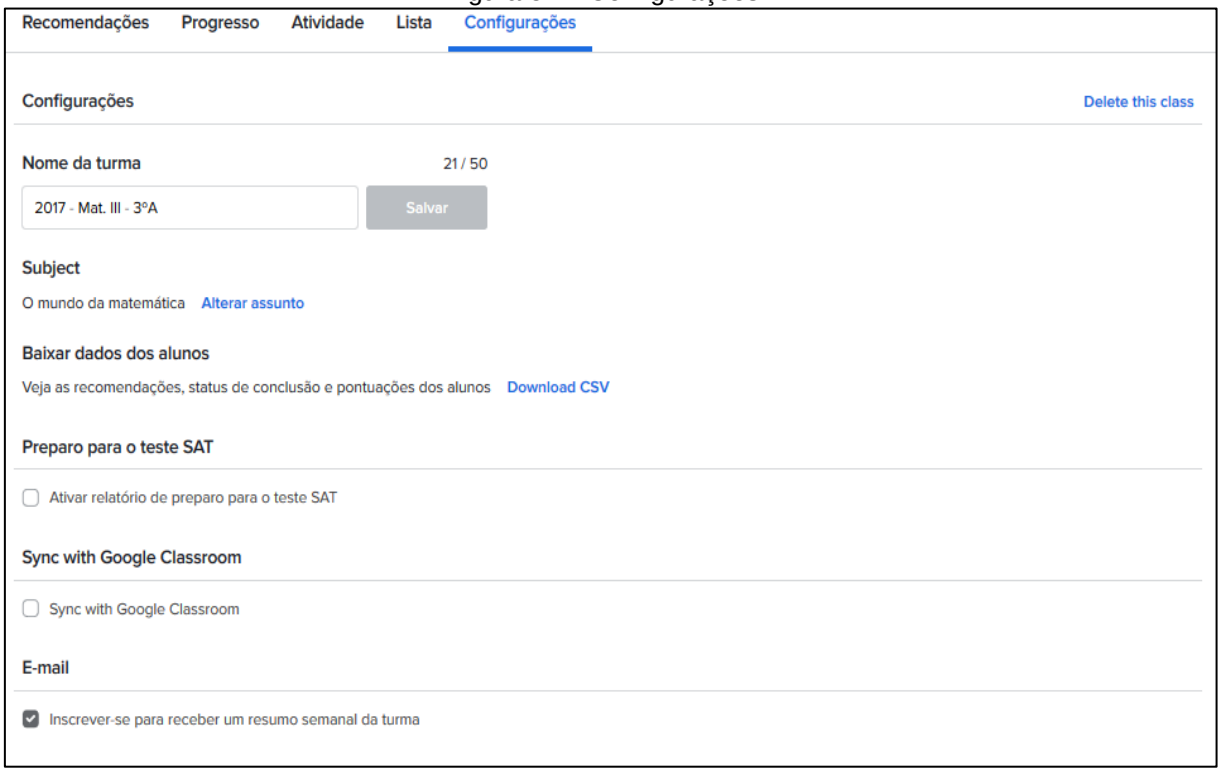
Fonte: *Khan Academy* (2017).

Nesta tela também é possível realizar análises como, por exemplo, identificar se o estudante está fazendo as atividades indicadas na sala de aula, ou em outro momento, já que os horários de acesso ficam registrados. Para Corrêa (2016) o professor pode perceber sintomas de noites de sono não adequadas, corroborando para fatores que atrapalham o andamento da aprendizagem e possibilitando contatar um responsável sobre tais atividades do estudante.

Na guia “Lista”, o professor tem acesso a lista de alunos daquela turma podendo adicionar novos alunos, removê-los da turma ou parar de ensinar.

Na guia “Configurações” (Figura 51) é possível editar o nome da turma, os assuntos, realizar sincronização com o Google Classroom (Google Sala de aula), deletar a turma e também se inscrever para receber por e-mail resumos semanais do aproveitamento dos estudantes. E nesta opção, pode-se fazer o *download* de todas as recomendações dadas e dos aproveitamentos dos alunos em formato CSV.

Figura 51 – Configurações.



Fonte: *Khan Academy* (2017).

Para o professor, existem planilhas eletrônicas com dados das opções progresso por habilidade e progresso por aluno, sendo que neste existem abas para melhor organização dos dados. Com o intuito de exemplificar, as tabelas que serão explicadas a seguir são exemplos das planilhas obtidas na plataforma, as quais foram produzidas a partir dos dados da *Khan Academy* dos alunos da turma a ser utilizada nesta pesquisa. Estes alunos já a utilizam nas aulas de Matemática como estudos complementares.

Antes de realizar o *download* da planilha das opções citadas é interessante utilizar-se do filtro missão da plataforma para que se obtenha uma planilha personalizada daquela missão, caso contrário, a planilha fica muito extensa, o que dificulta as análises e a procura de informações. Exclusivamente na planilha de progresso por aluno é possível utilizar o filtro “Atividade de:”, escolhendo seu intervalo de tempo personalizado (o progresso é por aluno, mas nesta planilha constam os dados de todos os que compõe da turma). Para realizar o download da planilha referente a determinada opção, basta clicar no botão download indicando quando possível o filtro para que a planilha seja gerada a partir do mesmo.

A planilha referente ao progresso por habilidade (Quadro 5) tem apenas uma aba chamada “Exercícios”, e lá encontram-se as habilidades da missão filtrada da plataforma com o nível em que o estudante se encontra perante aquela habilidade.

Quadro 5 – Planilha eletrônica: progresso por habilidade (exercícios).

Exercícios	Divisão de 1 algarismo	Equações matriciais: multiplicação escalar	Some três números
Com dificuldade		Aluno G	
Precisa Praticar	Aluno B, Aluno D, Aluno E, Aluno G	Aluno A, Aluno B, Aluno F	Aluno C, Aluno D
Praticado	Aluno A, Aluno F		
Nível 1	Aluno C	Aluno C, Aluno E	Aluno A, Aluno B, Auno F, Aluno G
Nível 2			Aluno E
Dominado		Aluno D	

Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

A planilha referente a progresso por aluno possui seis abas, que contêm informações mais organizadas sobre os estudantes. Na aba "*Summary*" (Síntese) (Quadro 6 e Quadro 7) é possível acompanhar o quantitativo de estudantes que estão em determinado nível, total de minutos, minutos em vídeos, minutos em habilidades, quantidade de medalhas ganhas, pontos de energia ganhos, a turma que o estudante pertence e o link para acessar o perfil do estudante.

Quadro 6 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (*Summary*) – Parte I.

Aluno	Com dificuldade	Precisa praticar	Praticado	Nível 1	Nível 2	Dominado
Aluno A	2	4	11	6	2	209
Aluno B	0	5	7	4	1	11
Aluno C	0	0	3	0	0	93
Aluno D	1	2	11	15	1	22
Aluno E	1	11	9	2	1	125
Aluno F	0	1	6	8	0	65
Aluno G	3	5	11	9	14	95
Aluno H	0	2	17	13	1	47

Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

Quadro 7 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (*Summary*) – Parte II.

Total de minutos	Minutos nos vídeos	Minutos nas habilidades	Medalhas conquistadas	Pontos ganhos	Turmas	Perfil do Estudante
815,2833333	260,38	554,90	84	338715	Turma A	Link
55,86666667	0,00	55,87	6	7545	Turma A	Link
174,3833333	5,57	168,82	35	53973	Turma A	Link
108,95	51,47	57,48	11	23354	Turma A	Link
161,65	6,37	155,28	39	87235	Turma A	Link
49,71666667	2,70	47,02	19	40043	Turma A	Link
211,8	40,78	171,02	34	63059	Turma A	Link
50,08333333	2,32	47,77	17	29783	Turma A	Link

Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

Na aba "*Mission-specific*" (Missão específica) (Quadro 8) apresenta-se o quantitativo de habilidades realizadas em determinado nível de domínio por estudante.

Quadro 8 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (*Mission-specific*).

Aluno	Com dificuldade	Precisa praticar	Praticado	Nível 1	Nível 2	Dominado
Aluno A	2	4	11	6	2	209
Aluno B	0	5	7	4	1	11
Aluno C	0	0	3	0	0	93
Aluno D	1	2	11	15	1	22
Aluno E	1	11	9	2	1	125
Aluno F	0	1	6	8	0	65
Aluno G	3	5	11	9	14	95
Aluno H	0	2	17	13	1	47

Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

Na aba "*Exercises*" (Exercícios) (Quadro 9) é possível consultar, por estudante, quais foram os exercícios feitos, a data do último exercício realizado, o status do nível daquele exercício, o quantitativo de perguntas e o tempo gasto (em minutos).

Quadro 9 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (*Exercises*).

Aluno	Exercício	O último realizado	Status atual	Perguntas	Tempo gasto (min).
Aluno A	Calcule o comprimento do lado que falta, dado o perímetro	2017-05-09	Com dificuldade	30	14,96
Aluno A	Diferenças de tempo (até uma hora)	2017-05-09	Com dificuldade	5	6,42
Aluno A	Encontre o número que falta (soma e subtração de números até 1000)	2017-05-09	Dominado	26	43,18
Aluno B	Nomeie os ângulos	2017-02-21	Nível 2	2	0,93
Aluno B	Dê nome às formas 3	2017-03-09	Nível 1	13	1,55
Aluno B	Adição até 20	2017-03-09	Nível 1	1	0,06
Aluno C	Conte dinheiro (moeda americana)	2017-05-13	Dominado	19	42,20
Aluno C	Some números de dois algarismos (sem reagrupamento)	2017-05-12	Dominado	3	10,27
Aluno C	Dê nome às formas 2	2017-05-08	Dominado	19	5,85
Aluno C	Resolva problemas com gráficos de barras 1	2017-05-09	Dominado	4	6,03
Aluno C	Compare números de objetos 1	2017-05-08	Dominado	3	5,1

Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

Na aba "Vídeos" (Quadro 10) é possível acompanhar os vídeos assistidos pelos estudantes, assim como as respectivas datas.

Quadro 10 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (Vídeos).

Aluno	Vídeo	Data
Aluno A	*Intro to the trigonometric ratios*	2017-02-23
Aluno B	*Worked example: domain and range from graph*	2017-02-23
Aluno C	*Comparing fractions 2 (unlike denominators)*	2017-03-02
Aluno C	*Equivalent fraction models*	2017-03-02
Aluno D	*Angles in a triangle sum to 180° proof*	2017-03-02
Aluno D	*Sums of consecutive integers*	2017-04-13
Aluno E	*Counting dollars*	2017-05-12
Aluno E	*Counting American coins*	2017-05-13

Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

Em "*Badges*" (Medalhas) (Quadro 11) é possível observar quando e quais medalhas os estudantes conquistaram.

Quadro 11 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (*Badges*).

Aluno	Medalha	Data
Aluno A	Dez à quinta potência	2017-02-24
Aluno A	Persistência	2017-02-24
Aluno A	Nerd da semana: prática	2017-02-24
Aluno B	Nota dez	2017-05-08
Aluno B	Desafio aceito	2017-05-08
Aluno C	Apenas começando	2017-03-30
Aluno C	Toca aqui	2017-03-30
Aluno C	Produtivo	2017-03-30
Aluno C	Progredindo	2017-03-30

Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

Por fim, na aba "*Points*" (Pontos) (Quadro 12) é possível observar quantos pontos os estudantes ganharam em determinado dia de estudo.

Quadro 12 – Planilha eletrônica: progresso por aluno (*Points*).

Alunos	Pontos	Data
Aluno A	41200	2017-02-24
Aluno A	50090	2017-02-23
Aluno A	8000	2017-02-20
Aluno B	345	2017-03-30
Aluno B	4150	2017-03-09
Aluno C	16375	2017-05-08
Aluno D	31557	2017-03-02
Aluno E	440	2017-03-15
Aluno E	615	2017-04-13

Fonte: Adaptado de *Khan Academy* (2017).

4 METODOLOGIA

Neste capítulo descreve-se a metodologia de pesquisa adotada e o detalhamento dos procedimentos metodológicos desenvolvidos com vistas à obtenção dos objetivos deste trabalho.

4.1 METODOLOGIA DE PESQUISA

A metodologia de pesquisa utilizada é a investigação exploratória, a fim de observar a viabilidade da proposta de ensino de números complexos, polinômios e equações polinomiais utilizando a plataforma educacional *Khan Academy*. A pesquisa exploratória busca "[...] realizar um estudo com o intuito de obter informações ou dados mais esclarecedores e consistentes sobre ela. [...] Funciona como uma sondagem e visa verificar se uma determinada ideia de investigação é viável ou não." (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 69). Como a plataforma educacional *Khan Academy* é uma ferramenta recente no Brasil, no que se refere ao ensino e à aprendizagem na sala de aula, e em busca de conhecer melhor esta plataforma, a presente pesquisa utiliza esta investigação exploratória.

Sob a perspectiva de investigação exploratória esta pesquisa também se adequa a um estudo de caso com o seguinte propósito: "Descrever a situação do contexto em que está sendo feita determinada investigação" (GIL, 2010, p. 39). A situação a ser investigada consiste na viabilidade do uso dessa plataforma no processo de ensino de números complexos, polinômios e equações polinomiais e de avaliação processual e final da aprendizagem dos estudantes participantes.

Conforme Gil (2010, p. 117), o estudo de caso contempla os seguintes itens:

a) Formulação do problema ou das questões de pesquisa;
b) Definição das unidades-caso;
c) Seleção dos casos;
d) Elaboração do protocolo;
e) Coleta de dados;
f) Análise e interpretação dos dados;
g) Redação do relatório

Iniciou-se com as observações em sala de aula trazendo discussões acerca da utilização da plataforma para o ensino e para a avaliação da aprendizagem. Foram selecionadas duas turmas de terceiro ano do Ensino Médio Integrado do *Campus* Caxias do Sul. Nesse processo, utilizou-se do estágio supervisionado para a realização dessa pesquisa. A partir das aplicações dos planos houve a coleta e análise de dados.

4.2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O trabalho iniciou com a fase exploratória por meio da observação de duas turmas do turno da manhã do 3º ano do Ensino Médio Integrado do IFRS, *Campus* Caxias do Sul. Esta atividade estava relacionada à disciplina “Práticas de Ensino da Matemática no Ensino Médio”, componente curricular do Curso de Licenciatura em Matemática, onde desejava-se analisar a relação entre os estudantes e professora regente das turmas, bem como a sua atuação em sala de aula.

As turmas A e B eram formadas por 32 e 35 alunos, respectivamente, sendo compostas por estudantes de três cursos técnicos integrados ao Ensino Médio. Por esta característica, normalmente se agrupavam por cursos para desenvolver as atividades propostas em sala de aula. Apesar disso, percebeu-se a existência do senso de coletividade. Os alunos tinham entre 16 e 18 anos. Ambas as turmas tinham rendimento e participação em aula parecidos. Um fato a ser salientado foi a percepção da autonomia dos estudantes na realização dos exercícios propostos. Durante as aulas, a professora regente da turma realizava atendimentos individuais. Os próprios alunos adotavam também esta prática com os colegas.

A professora já fazia uso da plataforma educacional *Khan Academy* como atividade de estudos complementares às aulas. Cada turma possuía três períodos semanais de Matemática, totalizando duas horas e trinta minutos. Quanto ao desempenho (em notas), ambas as turmas possuíam uma média de 60% de aproveitamento. Nas aulas de Matemática, os estudantes tinham disponível um período semanal no laboratório de informática da Instituição, sendo opcional o seu uso. A professora indicava exercícios/textos/atividades para serem realizados no Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem da Instituição (MOODLE), na plataforma educacional *Khan Academy* ou exercícios do livro didático adotado. Enquanto a professora circulava pelos dois ambientes (laboratório de informática e sala de aula), auxiliava os estudantes individualmente. Percebeu-se que os estudantes tinham autonomia em escolher a forma de estudo sobre o conteúdo abordado, ou seja, eles já participavam de um processo em que eles eram responsáveis pela sua aprendizagem.

A partir do observado nas aulas, passou-se para a formulação do problema de pesquisa, pensando sobre como poderia ser utilizada a plataforma *Khan Academy* no ensino de Matemática, de forma a auxiliar ainda mais estes estudantes. Como a professora não exigia o estudo de um conteúdo em específico na plataforma, a ideia foi trazer uma proposta de sua utilização para o ensino de números complexos, polinômios e equações polinomiais.

Na disciplina de “Estágio Supervisionado de Matemática no Ensino Médio” foram organizados os planos de aula (diários de bordo) contemplando a utilização da plataforma

educacional *Khan Academy* e abordando os temas: números complexos, polinômios e equações polinomiais. Os diários de bordo foram construídos de acordo com os conteúdos relacionados no Plano de Ensino da disciplina “Matemática III”:

- Números complexos
    - Conjunto dos números complexos;
    - Forma algébrica dos números complexos;
    - Plano complexo;
    - Conjugado de um número complexo;
    - Operações com números complexos na forma algébrica;
    - Quociente de dois números complexos na forma algébrica;
    - Módulo e argumento de um número complexo;
    - Forma trigonométrica ou polar dos números complexos;
    - Operações (soma, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números complexos na forma trigonométrica.
- Polinômios
    - Definição de polinômios;
    - Função polinomial;
    - Igualdade de polinômios;
    - Valor numérico de um polinômio;
    - Raiz de um polinômio;
    - Adição, subtração e multiplicação de polinômios;
    - Divisão de polinômios;
    - Teorema do resto (Teorema de D’Alembert);
    - Dispositivo prático de Briot-Ruffini.
- Equações polinomiais ou algébricas
    - Definição de equações polinomiais ou algébricas;
    - Raiz de uma equação polinomial;
    - Teorema Fundamental da Álgebra;
    - Teorema da decomposição;
    - Multiplicidade de uma raiz;
    - Relações de Girard (relações entre coeficientes e raízes);
    - Raízes complexas;
    - Teorema das raízes racionais.

Foram realizados encontros semanais com a supervisora de estágio e com a professora regente da disciplina, a fim de revisar os planos de aula e discutir as melhores formas de aplicação.

Na primeira aula, foi apresentado aos estudantes das duas turmas a plataforma educacional *Khan Academy* como uma ferramenta para o estudo dos temas já mencionados.

A aplicação dos planos de aula se deu, inicialmente, em dois períodos (100 minutos) no laboratório de informática e um período (50 minutos) em sala de aula, entretanto, ao longo da pesquisa esta distribuição sofreu alterações, em função do andamento das aulas. Devido ao número de computadores do laboratório (24), alguns alunos trabalharam em duplas. Com o desenvolvimento das atividades na plataforma, foi possível monitorar as dificuldades apresentadas pelos estudantes e contribuir no processo de aprendizagem destes conceitos por meio da indicação de exercícios da plataforma e de fora. Os alunos receberam auxílio durante as aulas, tanto no laboratório, quanto em sala de aula.

As atividades e vídeos na plataforma *Khan Academy* eram para serem desenvolvidas semanalmente, entretanto de acordo com o rendimento, estas necessitaram de atualizações de prazos para que os estudantes a realizassem. O desempenho dos estudantes foi analisado por diário de bordo. Esta análise encontra-se no capítulo “Resultados e discussões”.

A fim de verificar as contribuições na aprendizagem do ponto de vista dos estudantes, foi aplicado um questionário em forma de entrevista online. Neste questionário eles puderam falar sobre a metodologia empregada pelo professor e fazer uma autoavaliação de sua aprendizagem, apresentando uma análise das dificuldades e facilidades encontradas no desenvolvimento das atividades.

Para analisar o processo de aprendizagem dos estudantes foram realizadas três provas: uma pré-prova sobre números complexos, seguida de uma prova, e outra prova sobre polinômios e equações polinomiais. As atividades práticas realizadas na plataforma *Khan Academy* também compuseram a nota dos estudantes em um percentual de 30%. Como avaliação processual, semanalmente foram consultados os relatórios gerados na plataforma, descritos na seção 3.5, nos quais observou-se a realização das tarefas indicadas pelo professor, verificando-se se o estudante praticou com um bom número de acertos e se o estudante encontrou dificuldades em determinado tópico. Outra análise possível foi verificar como estava o desenvolvimento das habilidades enquanto turma e, em alguns casos, foi possível fazer intervenções na aula para todos ou para alguns estudantes em específico.

Em função dos estudantes que não conseguiam fazer as atividades em sala de aula, ou em casa, algumas vezes foram aumentados os prazos para que eles tivessem outra oportunidade de ter sua nota referente à atividade. Além disso, esta prática permitiu o respeito ao ritmo da turma e às dificuldades apresentadas em conteúdos complementares

aos estudados em sala de aula. Neste contexto, os estudantes puderam desenvolver sua autonomia na busca de conteúdos mais básicos para sanar suas dificuldades.

Em relação às atividades em sala de aula, foram indicadas listas de exercícios adicionais para que os estudantes pudessem resolvê-las no caderno, uma vez que a ideia da pesquisa não é utilizar somente a *Khan Academy*, mas sim utilizá-la como suporte para o ensino dos conteúdos em questão. Além dessas listas, os alunos receberam a orientação de resolver no caderno alguns exercícios indicados na plataforma, para que pudessem buscar informações pertinentes posteriormente. As atividades indicadas nas listas também tiveram a finalidade de suprir algumas dificuldades apresentadas pelas turmas, ou por um grupo de estudantes, bem como abordar conteúdos não contemplados pela plataforma.

Ao final, realizou-se um confronto entre a aprendizagem diagnosticada pela plataforma, as observações do professor e os resultados das provas, propiciando uma discussão sobre os resultados da prática de ensino proposta nesta pesquisa.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo apresentam-se os resultados da pesquisa. O capítulo está estruturado por diários de bordo e avaliações. Os diários de bordo foram construídos contemplando os conteúdos de números complexos, polinômios e equações polinomiais, apresentados como apêndices a este trabalho.

5.1 DIÁRIO DE BORDO 1

O diário de bordo 1 (apêndice A) foi iniciado nas turmas nos dias 07 e 10 de agosto de 2017, contemplando os seguintes tópicos sobre números complexos:

- Introdução ao conjunto dos números complexos;
- Introdução aos números complexos;
- Forma algébrica de um número complexo;
- Partes de um número complexo, classificação e igualdade de números complexos;
- Operações na forma algébrica (soma, subtração e multiplicação);
- Conjugado de um número complexo.

A primeira atividade que envolvia a plataforma educacional *Khan Academy* foi assistir a um vídeo sobre as potências da unidade imaginária disponível na plataforma. Durante a aula no laboratório de informática, percebeu-se que cada estudante foi no seu ritmo. Enquanto alguns copiavam o conteúdo do vídeo, outros apenas assistiam atentos. Após esta etapa, verificou-se que muitos precisavam de uma mediação, não completa, mas um direcionamento sobre os principais conceitos do vídeo.

Para a introdução do plano complexo utilizou-se o artigo “O Plano Complexo”, na Figura 52 apresenta-se um excerto desse artigo. Os estudantes realizaram uma leitura colaborativa, a qual foi muito positiva, pois eles se sentiram à vontade em tirar suas dúvidas, fazer apontamentos de forma oral e escrita. Esta atividade contou com os exemplos e os exercícios disponíveis pela plataforma. Houve distrações entre estudantes durante a realização da atividade.

Figura 52 – Excerto do artigo “O Plano Complexo”.

Plotagem de um número complexo

Todo número complexo pode ser representado por um ponto no plano complexo.

Por exemplo, considere o número $3 - 5i$. Este número, também expressado como $3 + (-5)i$, tem uma parte real de 3 e uma parte imaginária de -5.

A posição desse número no plano complexo é o ponto que corresponde a 3 no eixo real e -5 no eixo imaginário.

Fonte: *Khan Academy* (2017).

Como cada turma possuía seu ritmo e por terem somente três períodos semanais, sendo dois com possibilidade de utilização do laboratório de informática, foi acordado com as turmas que parte das atividades seriam desenvolvidas durante as aulas, entretanto muitas das atividades práticas deveriam ser realizadas em casa. Percebeu-se, nesta primeira semana, que grande parte dos estudantes das duas turmas realizaram as atividades no prazo estabelecido, pois estavam empolgados com essa nova metodologia. Nessa primeira parte, preferiu-se que eles assistissem aos vídeos da plataforma por iniciativa própria, então foram recomendadas apenas as atividades práticas da plataforma para serem realizadas em casa.

No dia 14 de agosto, houve a continuação do diário de bordo 1 com a introdução da multiplicação de números complexos na forma algébrica. Foi realizada a leitura colaborativa com os estudantes do artigo “Multiplicação de Números Complexos” da *Khan Academy* (Figura 53) e posteriormente o conceito algébrico. A abordagem foi positiva, pois no artigo, as operações eram apresentadas por etapas e com jogo de cores, facilitando a visualização. Solicitou-se a leitura em voz alta pelos estudantes e, com a mediação do professor, e eles iam acompanhando os passos desenvolvidos na *Khan Academy*, em seus computadores, resolvendo os exercícios da plataforma.

Figura 53 – Excerto do artigo “Multiplicação de Números Complexos”.

Multiplicação de dois números complexos

Exemplo

Multiplique $(1+4i)(5+i)$. Escreva o número resultante na forma $a+bi$.

Solução

Nesse exemplo, alguns acham útil pensar em i como uma variável.

De fato, o processo de multiplicação desses dois números complexos é muito semelhante ao de multiplicação de dois binômios! Multiplique cada termo do primeiro número por cada termo do segundo número.

$$\begin{aligned}(1+4i)(5+i) &= (1)(5)+(1)(i)+(4i)(5)+(4i)(i)\\ &= 5+i+20i+4i^2\\ &= 5+21i+4i^2\end{aligned}$$

Como $i^2=-1$, podemos substituir i^2 por -1 para obter a forma $a+bi$ desejada.

Fonte: *Khan Academy* (2017).

Esse modelo, onde os estudantes realizam a leitura e acompanham em seu respectivo computador, tem um formato que é possível realizar duas constatações, uma positiva e outra negativa. A negativa se dá ao fato de que não é possível o professor

controlar o que cada estudante acessa na rede, se ele está estudando sobre a aula ou se está fazendo atividades que não correspondem a aula; é possível que o professor mapeie e converse com o estudante para que interaja com a aula, mas é difícil fazer este controle. A parte positiva, é que alguns estudantes “mais rápidos” já faziam os exemplos, os exercícios de prática e até mesmo vendo materiais de tópicos ainda não abordados. Por parte dos estudantes percebeu-se o senso de companheirismo, pois o estudante que já terminava, auxiliava ao outro como deveria ser desenvolvido o exercício.

Foram dadas atividades de recomendação sobre os tópicos vistos em aula, entretanto nem todos os estudantes realizavam por diferentes motivos, acúmulo de conteúdos, de outras disciplinas inclusive, e de tarefas da vida pessoal. Neste contexto, o excesso de informações dispostas à sociedade, traz dificuldades na hora de discernir, julgar e analisar o que é e não benéfico, entretanto isso exige da pessoa um processo de amadurecimento (SILVA FILHO; DELGADO, 2011) o que ainda está se iniciando em um estudante de Ensino Médio.

5.2 DIÁRIO DE BORDO 2

O diário de bordo 2 (apêndice B) foi iniciado nas turmas no dia 17 de agosto de 2017, contemplando os seguintes tópicos sobre números complexos:

- Revisão de conjugado;
- Divisão de números complexos;
- Módulo e argumento;
- Revisão de representação de arcos notáveis;
- Revisão de cosseno e seno de arcos notáveis.

Nesta aula foi feita uma revisão sobre conjugado, através de pequenos exemplos, a definição de divisão de números complexos e a realização de atividades da *Khan Academy*. Percebeu-se que os estudantes tinham entendido o conceito de divisão, mas os frequentes erros de operações básicas (principalmente os sinais), culminou na dificuldade deste tópico.

O valor absoluto ou módulo de um número complexo foi um tópico trabalhado com maior participação dos estudantes, pela sua visualização geométrica e posteriormente foi dado um tempo para realização das atividades da *Khan Academy*. No planejmaneto desta aula estava contemplado trabalhar até a forma polar ou trigonométrica, mas ao abordar argumento, percebeu-se que estudantes tinham dificuldade até na representação de um ângulo no plano cartesiano.

A partir desta constatação foi necessário, sob improviso, realizar uma aula sobre ângulos, sobre arcos notáveis, representação nos quadrantes, ciclo trigonométrico, representação de ângulos no plano complexo e as suas unidades de medida (Graus e

Radianos), revisão de seno e cosseno de arcos notáveis no 4 quadrantes. Por conta disso, decidiu-se que a calculadora não seria um instrumento da prova, para que os estudantes buscassem entender melhor o tópico e suas representações ao menos com os arcos notáveis.

Os exercícios que se referiam a ângulos disponíveis na *Khan Academy* não tratavam somente do seno e do cosseno de arcos notáveis, mas sim envolviam cálculos decimais que exigiam o uso da calculadora. Assim, há grande necessidade de conhecimento prévio e muito raciocínio, dificultando o entendimento, dada as atividades referentes a ângulos não foram aproveitadas de forma satisfatória pelas turmas, apenas por existirem alunos que tinham domínio sobre o conteúdo de trigonometria. Foi solicitado que procurassem se atualizar quanto a esses conteúdos necessários para a forma trigonométrica. Ao longo da semana não houve uma quantidade satisfatória de estudantes que buscaram atualizar-se em relação a estes conteúdos, o que causou um acúmulo das dificuldades.

5.3 DIÁRIO DE BORDO 3

O diário de bordo 3 (apêndice C) foi aplicado nas turmas nos dias 21 e 24 de agosto de 2017, contemplando os seguintes tópicos sobre números complexos:

- Forma polar de um número complexo;
- Operações na forma polar (soma, subtração, multiplicação e divisão).

Os estudantes entenderam o formato da forma trigonométrica ou polar de um número complexo e seus elementos, mas a grande dificuldade estava em encontrar seu argumento. Alguns estudantes tentaram fazer a atividade de ângulos da *Khan Academy*, mesmo opcional. Essa foi mais aula densa, pelas dificuldades apresentadas com ângulos, de modo que foram feitas recomendações das atividades planejadas e que não foram executadas durantes as aulas.

No dia 28 percebeu-se que não havia sido recomendado na plataforma exercícios sobre a transição entre a forma retangular (algébrica) e a forma trigonométrica, o que pode ter ocasionado uma dificuldade no entendimento desses tópicos. Entretanto foram dados exercícios complementares do livro, cabendo ao estudante a autonomia de explorar a plataforma, já que a proposta inicial consistia na procura por parte deles das suas dificuldades, todavia isso não foi possível, uma vez que não estavam fazendo as atividades básicas recomendadas.

A continuação do diário de bordo 3 ocorreu nos dias 28 e 31 de agosto de 2017, contemplando os seguintes tópicos de números complexos:

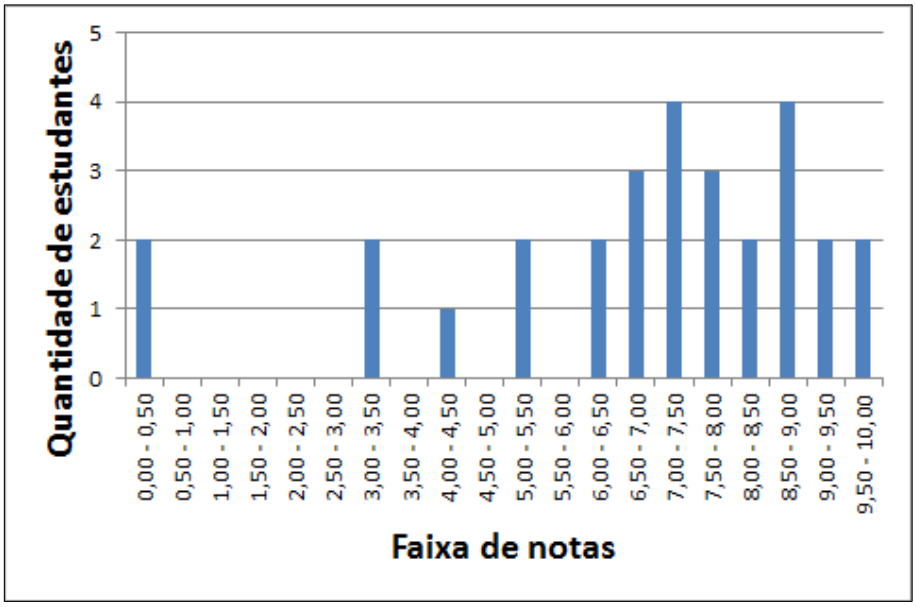
- Potenciação de números complexos;
- Revisão de números complexos de modo coletivo.

Sobre o tema de potenciação de números complexos, os estudantes estavam compreendendo a partir da forma trigonométrica, entretanto no exercício que solicitava a potência de um número complexo na forma algébrica percebeu-se a dificuldade de conversão. Então percebeu-se que não havia sido feita a recomendação sobre este tópico na plataforma, a qual foi feita no dia seguinte, com aviso prévio aos alunos. Era planejado iniciar o estudo da forma exponencial e o estudo de raízes de um número complexo, mas pelas dificuldades da turma, foi feito uma revisão de números complexos, com resolução de exercícios do caderno e também da *Khan Academy* e, principalmente, dando foco à transformação de um número complexo na forma algébrica para a forma trigonométrica.

Durante a semana foi construído um trabalho no Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem da Instituição (MOODLE) sobre números complexos, no formato de uma pré-prova, baseando-se nas questões da *Khan Academy* e nas do livro didático. Foi constatado que os estudantes que deixaram para a última, as atividades se acumularem, se sobrecarregaram e tiveram um resultado pior, enquanto os estudantes que foram realizando as atividades semana a semana conseguiram ter um aproveitamento melhor.

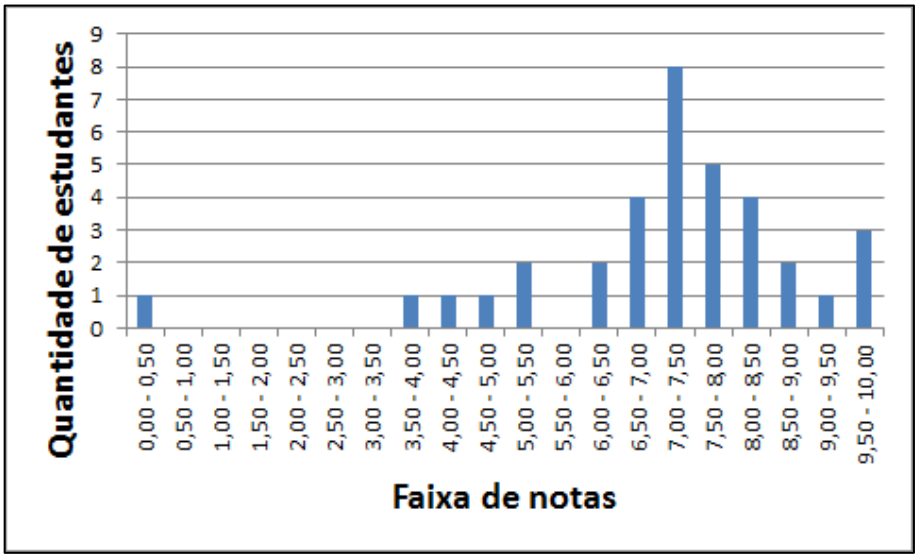
Durante a última semana antes da prova construiu-se um banco de questões sobre números complexos em que se sorteavam questões para os estudantes. Acordou-se que estava avaliação (nota) seria feita com *Khan Academy*, pois atividades construídas foram inspiradas pelas questões da plataforma e da sala de aula. Nos gráficos 1 e 2 estão a quantidade de estudantes por nota na pré-prova.

Gráfico 1 – Pré Prova: Turma A.



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 2 – Pré Prova: Turma B.



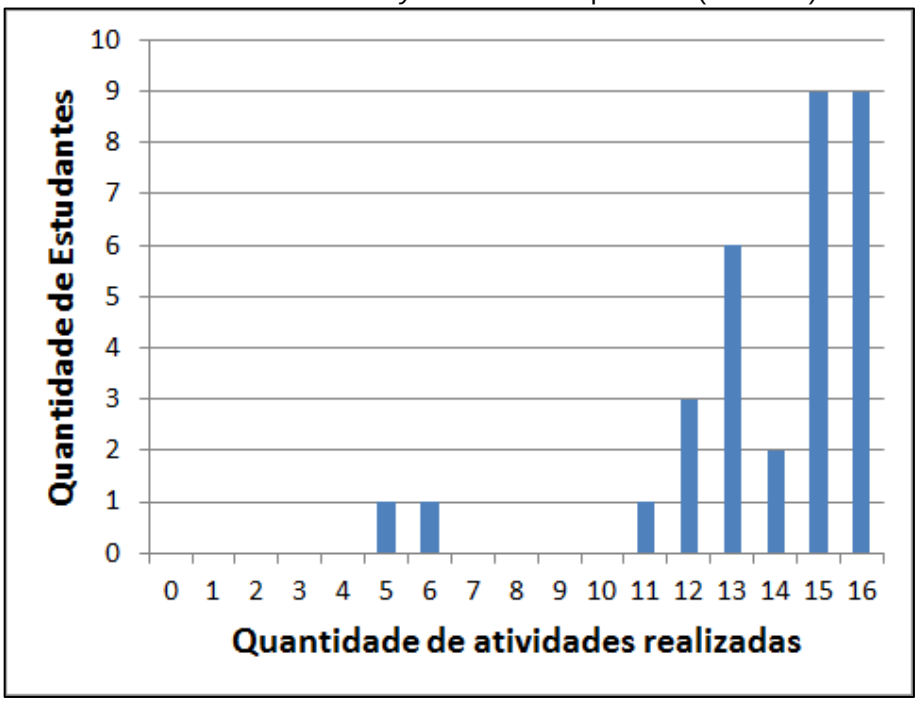
Fonte: Dados da pesquisa.

Em ambas as turmas obteve-se 12 estudantes que ficaram abaixo da média 7,0, observando-se que a pré-prova era uma atividade online e com desenvolvimento em casa. Embora as atividades sejam diferentes alguns estudantes se reuniram para fazer a atividade e estudar para a prova que seria na segunda-feira dia 04. Na turma A, houve estudantes que não abriram a avaliação.

5.4 *KHAN ACADEMY*: NÚMEROS COMPLEXOS

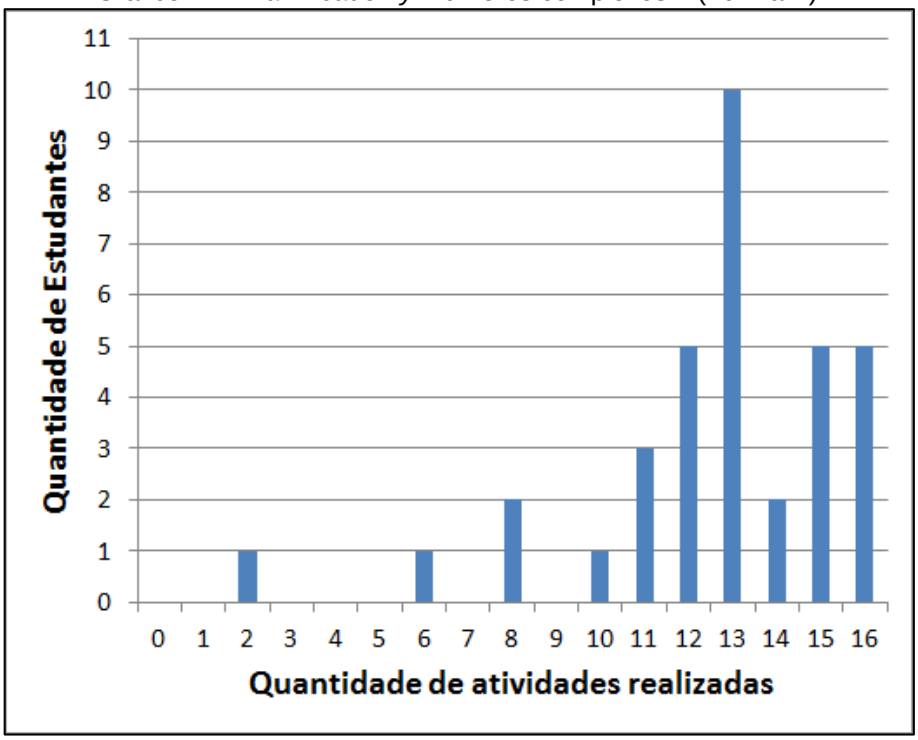
Devido a solicitações deixou-se a maioria das recomendações dadas desde o início do estágio até o domingo anterior a prova e depois prolongado o prazo para estudarem novamente para a prova de recuperação paralela. Foram dadas 16 recomendações de atividades (Artigo e Exercícios) durante este mês de aplicação dos planos na plataforma *Khan Academy* sobre Números Complexos. As análises não foram semanais devido aos estudantes solicitarem aumento dos prazos para realização das atividades. No Gráfico 3 a seguir está a representação da quantidade de estudantes (eixo vertical) pela quantidade de atividades realizadas (Eixo horizontal) pelos estudantes da turma A e no Gráfico 4 da turma B. Para ser considerada realizada o estudante precisava atingir no mínimo 75% de aproveitamento naquela recomendação.

Gráfico 3 – *Khan Academy*: números complexos 1 (Turma A).



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 4 – *Khan Academy*: números complexos 1 (Turma B).

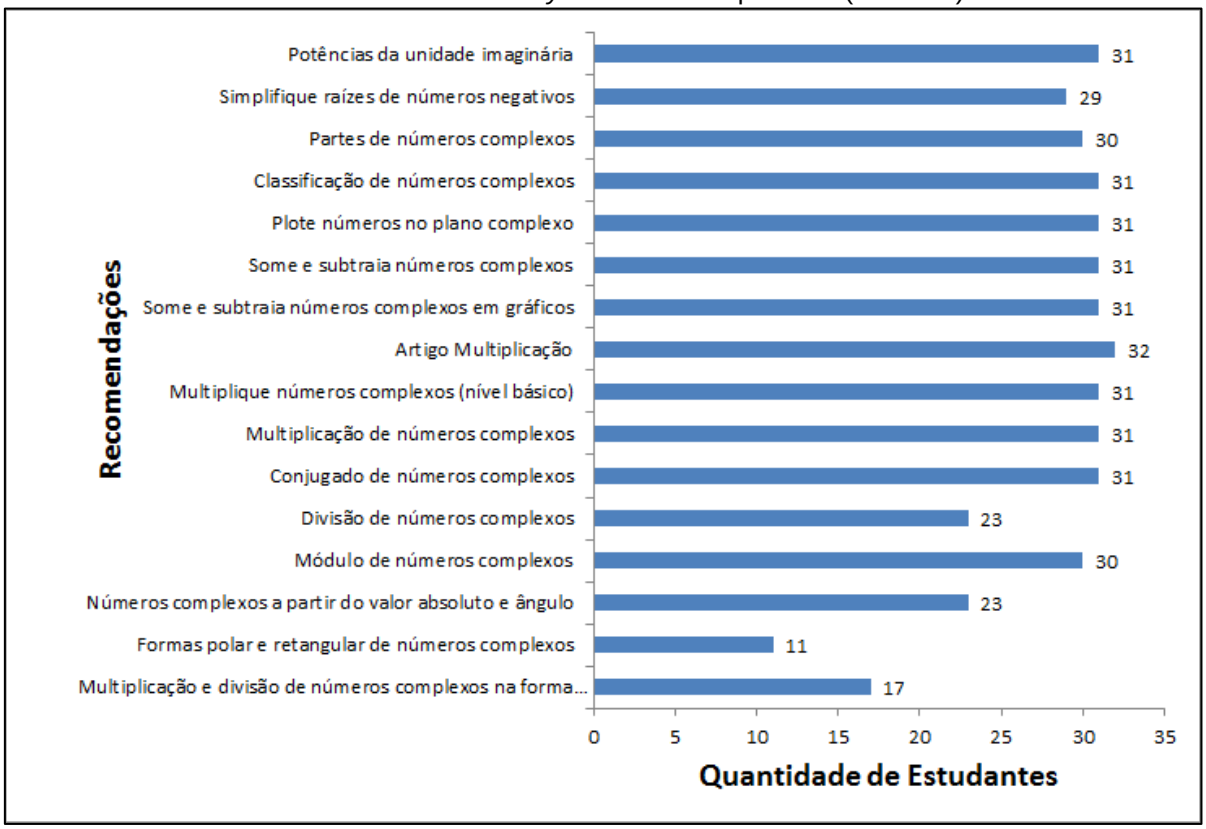


Fonte: Dados da pesquisa.

A partir de ambos os gráficos pode-se perceber que em ambas as turmas mais de 90% dos estudantes atingiram o aproveitamento de 70% previsto na instituição.

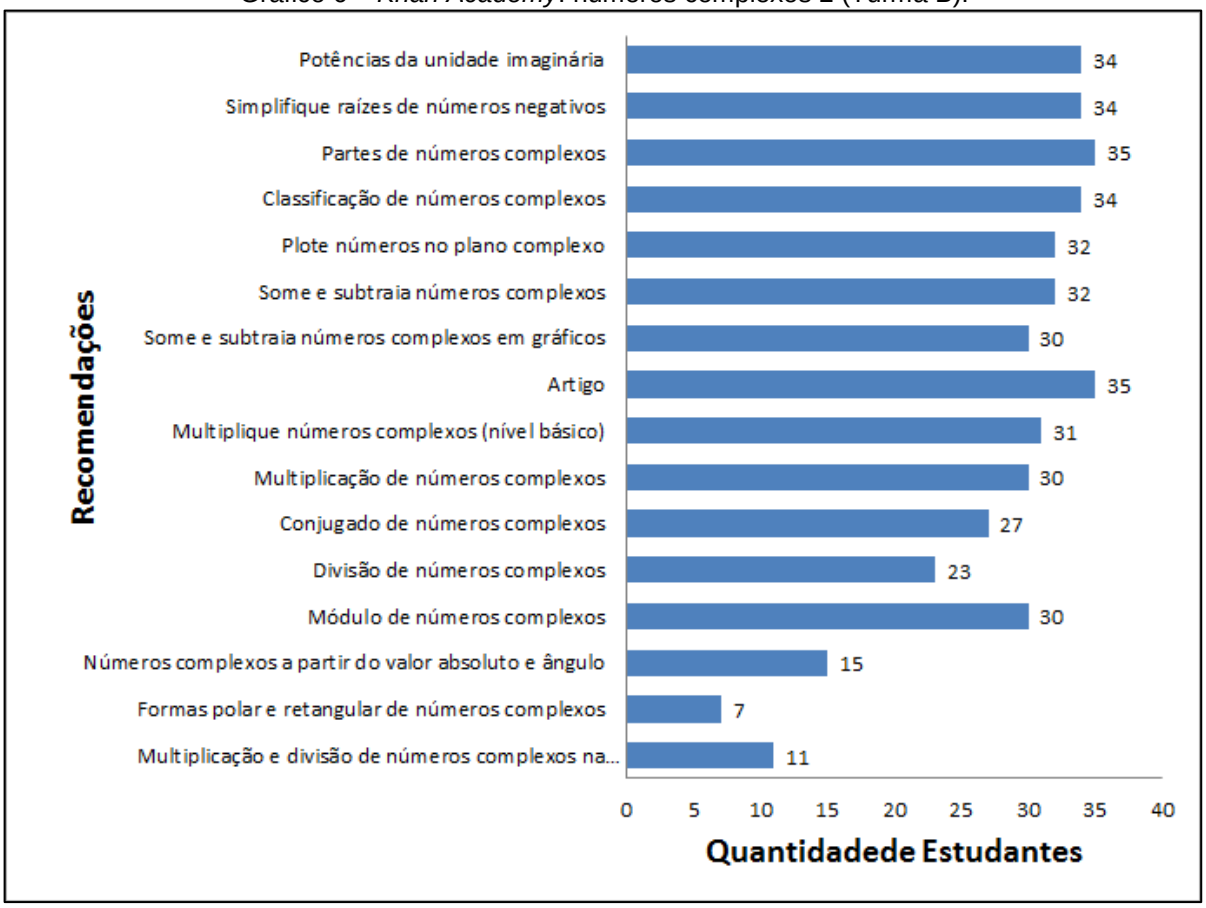
Agora nos gráficos 5 e 6 são dadas a quantidade de estudantes que realizaram por habilidade recomendada por turma.

Gráfico 5 – *Khan Academy*: números complexos 2 (Turma A).



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 6 – *Khan Academy*: números complexos 2 (Turma B).



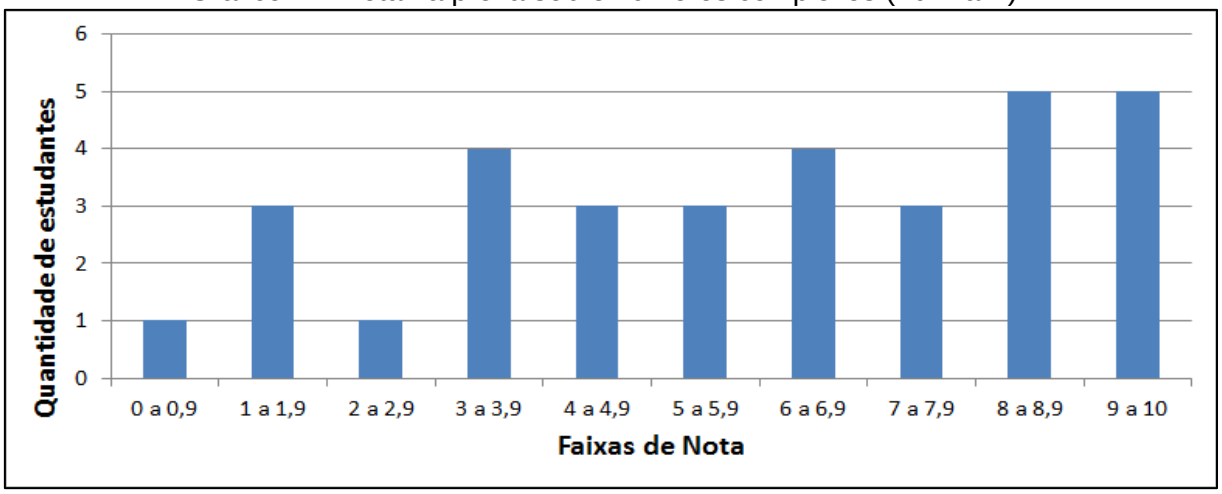
Fonte: Dados da pesquisa.

Devido a atividade só ser considerada realizada ao estudante que atingir a pontuação de no mínimo 75% de acerto, as atividades dos tópicos mais difíceis que foram divisão de números complexos (Principalmente operações básicas), e as que envolvem o argumento (ângulo) de um número complexo, pela necessidade do estudante possuir uma boa base referente à trigonometria foram os tópicos que os estudantes mais tiveram dificuldades durante a avaliação.

5.5 PROVA: NÚMEROS COMPLEXOS

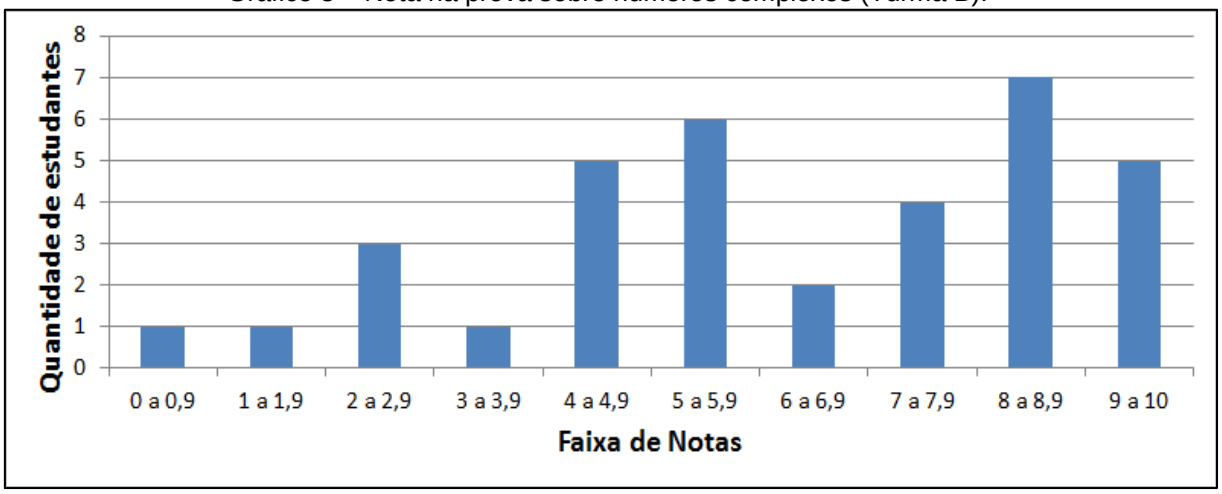
No dia 04 de setembro de 2017, foi realizada a prova de números complexos para a finalização das notas do segundo trimestre no valor de 10 pontos, a qual os estudantes tinham 2 períodos para a sua realização. Foram feitos dois tipos de provas uma para a turma A (apêndice D) e outra para a turma B (apêndice E). A relação da quantidade de estudantes por faixa de nota podem ser vistas no Gráfico 7 para a turma A e no Gráfico 8 para a turma B.

Gráfico 7 – Nota na prova sobre números complexos (Turma A).



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 8 – Nota na prova sobre números complexos (Turma B).



Fonte: Dados da pesquisa.

O aproveitamento de notas nas turmas A e B foram respectivamente 61% e 62%. Em ambas as turmas os principais erros foram referentes a operações na forma trigonométrica e da transformação da forma trigonométrica para a forma algébrica. A questão que envolvia a transformação da forma trigonométrica para algébrica e com operações de soma e subtração com outros números complexos na forma algébrica foi uma das que houve mais erros, como eles não tinham calculadora, eles precisavam analisar o valor e o quadrante do seno e cosseno do ângulo para que eles pudessem se atualizar perante este conteúdo. A questão 10, 11 que envolvem transformações da forma de um número complexo foram questões com alto índice de erro. As questões de multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica também resultaram em desenvolvimentos incorretos. Grande parte disso, foram causados na dificuldade de somar e subtrair os ângulos em radianos, sendo que alguns alunos até fizeram a conversão de radianos para graus antes da operação.

Relacionando-as com *Khan Academy* percebe-se que há um relação entre as recomendações não feitas pelos estudantes com as questões da prova.

5.5.1 Recuperação paralela da prova sobre números complexos

No dia 11 de setembro de 2017 foi realizada a prova de recuperação paralela de números complexos para recuperação da nota dos estudantes que obtiveram nota inferior à média 7. Esta prova possuiu valor máximo de 1 ponto.Caso com este ponto excedesse a nota 7, esta seria convertida para 7 para haver justiça entre os que puderam realizar as atividades recuperativas.

Nesta prova a média da prova de recuperação paralela foi de 0,62 na turma A e de 0,53 na turma B, embora foi observado que muitos estudantes que estavam próximos a média conseguiram se desenvolver muito melhor na atividade de recuperação.

5.5.2 *Khan Academy*: Pré-cálculo – números complexos

Os demais alunos foram convidados para irem ao laboratório de informática para realizar as missões de Pré-Cálculo para fortalecer seus conhecimentos sobre números complexos e de outros já que em missão, as questões são aleatórias. Foi acordado que todos os estudantes deveriam dominar todas as habilidades recomendadas de números complexos como forma de um trabalho do terceiro trimestre, com prazo até o término das atividades do estágio. Entretanto como é a ferramenta desafio, os estudantes que deixaram para última hora foram prejudicados, pois além de serem diversos conteúdos por desafio, a ferramenta em determinado bloqueia, quando foram realizadas muitas atividades em forma

de aviso de descanso para estudante. Nas figuras 54 e 55 é possível verificar como estava a aprendizagem nas habilidades de números complexos avaliadas.

Figura 54 – Pré-Cálculo: habilidades (Turma A).

Habilidade / Status de aprendizagem	Com dificuldade	Precisa Pr	Praticado	Nível 1	Nível 2	Dominado
Potências da unidade imaginária	3	0	1	1	1	26
Simplifique raízes de números negativos	1	4	2	3	3	19
Partes de números complexos	0	2	3	1	3	23
Classificação de números complexos	0	3	1	0	0	28
Plote números complexos no plano complexo	0	1	2	1	0	28
Some e subtraia números complexos	0	1	3	1	0	27
Some e subtraia números complexos em gráficos	1	1	4	1	0	25
Multiplique números complexos (nível básico)	0	2	4	3	4	19
Multiplicação de números complexos	0	2	3	2	0	25
Conjugado de números complexos	0	2	3	2	3	22
Divisão de números complexos	6	2	5	2	1	16
Módulo de números complexos	1	5	4	2	0	20
Números complexos a partir do valor absoluto e ângulo	5	11	2	1	1	12
Formas polar e retangular de números complexos	11	10	1	0	1	9
Multiplicação e divisão de números complexos na forma polar	11	10	1	0	1	9

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 55 – Pré-Cálculo: habilidades (Turma B).

Habilidade / Status de aprendizagem	Com dificuldade	Precisa Pr	Praticado	Nível 1	Nível 2	Dominado
Potências da unidade imaginária	1	3	18	0	1	12
Simplifique raízes de números negativos	2	2	22	5	2	2
Partes de números complexos	0	0	21	4	4	6
Classificação de números complexos	1	3	21	0	0	10
Plote números complexos no plano complexo	0	5	17	0	1	12
Some e subtraia números complexos	0	3	19	1	1	11
Some e subtraia números complexos em gráficos	3	6	19	0	0	7
Multiplique números complexos (nível básico)	0	6	20	5	1	3
Multiplicação de números complexos	1	6	19	1	1	7
Conjugado de números complexos	0	7	20	1	0	7
Divisão de números complexos	10	8	12	0	0	5
Módulo de números complexos	0	7	19	2	0	7
Números complexos a partir do valor absoluto e ângulo	2	18	13	1	0	1
Formas polar e retangular de números complexos	9	21	3	2	0	0
Multiplicação e divisão de números complexos na forma polar	6	20	9	0	0	0

Fonte: Dados da pesquisa.

Devido ao feriado de 07 de setembro, a turma A teve mais tempo no laboratório para desenvolver as atividades, do que a turma B o que não justifica a realização incompleta das atividades, pois estas deveriam ser desenvolvidas em sala de aula ou em casa e com prazo de 1 mês. Na turma A obtiveram-se resultados bem positivos quanto ao domínio das habilidades de números complexos. Enquanto a turma B teve um desempenho baixo quanto ao domínio de números complexos que envolvem ângulos e em geral de toda a atividade.

5.6 DIÁRIO DE BORDO 4

O diário de bordo 4 (apêndice F) foi iniciado nas turmas nos dias 18 e 21 de setembro de 2017, já no terceiro trimestre do ano letivo, contemplando os seguintes tópicos sobre polinômios:

- Introdução aos polinômios;
- Função polinomial;
- Raiz de um polinômio;
- Valor numérico;
- Igualdade de polinômios;
- Operações com polinômios (adição, subtração e multiplicação).

Pelo desenvolvimento desta aula, percebeu-se que os estudantes se desgastaram pela quantidade de definições e tópicos que foram estudados. Essa aula se deu principalmente por conteúdos expostos no quadro e resolução de exemplos para entendimento dos estudantes; Não há muito material sobre polinômios na plataforma *Khan Academy* como em livros do 3º ano que abordam polinômios, relacionando-os com números complexos, pois no material encontrado não faz referência a utilização de números complexos, somente com números reais. Por conseguinte, as atividades propostas de soma, subtração e multiplicação da plataforma, serviram como uma revisão das operações com polinômios do Ensino Fundamental, e por consequência a criação de uma base para o estudo de polinômios complexos. Foram dadas recomendações sobre introdução de polinômios e conceitos iniciais. As partes de soma, subtração, multiplicação foram vistas a partir da leitura colaborativa de seus respectivos artigos, dos exemplos da plataforma e dos exercícios de prática. Foi dada a sugestão, pela quantidade de definições, de que na próxima aula fossem utilizados slides para dar mais fluência a aula e que também para eles, é viável, pois a apresentação ficaria disponível no EAD, no espaço dedicado a esta disciplina, a qual foi aceita por eles.

5.7 DIÁRIO DE BORDO 5

No dia 25 de setembro de 2017 foi aplicado o diário de bordo 5 (apêndice G), versando sobre os seguintes tópicos de polinômios:

- Divisão de polinômios (forma longa e de Briot-Ruffini);
- Teorema do resto;
- Teorema de D’Alembert.

Antes de começar o plano, os estudantes solicitaram que fosse feito algum exemplo sobre multiplicação de polinômios para consolidação dos conceitos. A partir daíforam dados

os conteúdos, sem a utilização da plataforma em uma metodologia explicativa dialogada com a utilização de slides e resolução de exemplos. Nessa semana houve apenas a recomendação da atividade de multiplicação para que os estudantes consolidarem seus conhecimentos após a revisão.

Os vídeos e atividades sobre divisão de polinômios, não foram dadas nesta semana, pois o procedimento com o que o livro dos estudantes explicava divisão de polinômios (longa e sintética) era diferente de modo que optou-se deixar divisão longa aos dois modos (uma explicada em sala de aula e outra pela visualização do vídeo, sem recomendação) e a divisão sintética ou dispositivo prático de Briot-Ruffini abordar da mesma forma da plataforma, caso eles fossem procurar. Essas duas habilidades (divisão longa e sintética) necessitam de muitos cuidados com as operações básicas e, da mesma forma que ocorreu na divisão de complexos, ocorria nos processos de divisão.

Na ocasião, não foram dadas, também, pois percebeu-se que alguns não estavam fazendo as atividades do livro que envolvessem um pouco mais de raciocínio algébrico, e estavam apenas se baseando pelas atividades da *Khan Academy* e alguns tópicos da aula anterior não estavam na plataforma, somente nas listas de exercícios do livro.

Na semana seguinte decidiu-se realizar a recomendação de vídeos para que eles tenham outros modos de resolução, ficando a critério do estudante assistir ou não aos vídeos, pois alguns também ainda enfrentavam dificuldades em encontrar os materiais. Houveram alguns problemas de sincronização para os estudantes que assistiam para a plataforma, eles não eram contabilizados por algum motivo. (Mudança de tela, mudança da velocidade do vídeo, inatividade).

5.8 DIÁRIO DE BORDO 6

O diário de bordo 6 (apêndice H) foi iniciado nas turmas no dia 02 de outubro de 2017, contemplando os seguintes tópicos sobre equações polinomiais:

- Introdução e definição;
- Raiz de uma equação polinomial;
- Teorema Fundamental da Álgebra;
- Teorema da decomposição;
- Multiplicidade de uma raiz.

No dia 09 de outubro de 2017 foi dada continuidade ao diário de bordo 6, contemplando os seguintes tópicos sobre equações polinomiais:

- Relações de Girard (2º grau) e ideia para grau equações de grau n;
- Teorema das raízes complexas;
- Teorema das raízes racionais;

- Revisão coletiva.

Nessas duas semanas de aplicação do tópico de equações polinomiais, utilizou-se de slides e uma metodologia expositiva dialogada pela quantidade de definições e de conteúdos. Devido a fluência que o slide dá ao professor, talvez em alguns tópicos desses dois últimos o ritmo tenha ficado um pouco rápido, já que eram as primeiras experiências em dar aula com o suporte de uma apresentação de slides.

Inicialmente não deveriam ser dadas recomendações de atividades da *Khan Academy*, pois os estudantes não estavam conseguindo ter um equilíbrio entre as recomendações e os exercícios complementares, os quais eram orientados a fazer somente alguns e não se debater nos repetidos. Pelosexercícios da plataforma são fornecidas todas as resoluções das atividades, a disposição de dicas e de vídeos, isso se tornou vantajoso para a aprendizagem dos estudantes até então. Logo nesse dia, foram dadas recomendações de divisão de polinômios (divisores binomiais e polinomiais, com e sem restos) e envolvendo teorema do resto, com o intuito deles procurarem resolver, pois se não houvesse a recomendação alguns estudantes não procurariam.

Os tópicos de raízes de um polinômio de grau maior que 3, teorema das raízes complexas, teorema da decomposição, multiplicidade de uma raízes, relações de Girard, teorema das raízes racionais não foram abordados com a *Khan Academy* por não existirem ou por estarem imersos em outros conteúdos (por exemplo, funções). Então nessa parte a plataforma serviu como um instrumento de aprendizagem nas operações com polinômios (soma, subtração, divisão e multiplicação), determinação de raízes complexas de equações de segundo grau e o teorema do resto tópicos necessários para aprendizagem dos tópicos de polinômios e equações polinomiais.

5.9 *KHAN ACADEMY*: POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS

A análise das recomendações realizadas sobre polinômios e equações polinomiais estão expostas na Figura 56 para a turma A e Figura 57 para a turma B.

Figura 56 – *Khan Academy*: polinômios e equações polinomiais (Turma A).

Habilidade / Status de aprendizagem	Número de estudantes
Introdução aos polinômios	32
Soma de polinômios (introdução)	32
Subtração de polinômios (introdução)	31
Soma e subtração de polinômios	31
Multiplique binômios por polinômios	31
Use o Teorema do Resto Polinomial	27
Solução de equações de segundo grau: Raízes complexas	26
Divisão com divisores binomiais	24
Divisão de polinômios	24

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 57 – *Khan Academy*: números complexos 1 (Turma B).

Habilidade / Status de aprendizagem	Número de estudantes
Introdução aos polinômios	34
Soma de polinômios (introdução)	34
Subtração de polinômios (introdução)	30
Soma e subtração de polinômios	29
Multiplique binômios por polinômios	30
Use o Teorema do Resto Polinomial	24
Solução de equações de segundo grau: Raízes complexas	21
Divisão com divisores binomiais	18
Divisão de polinômios	17

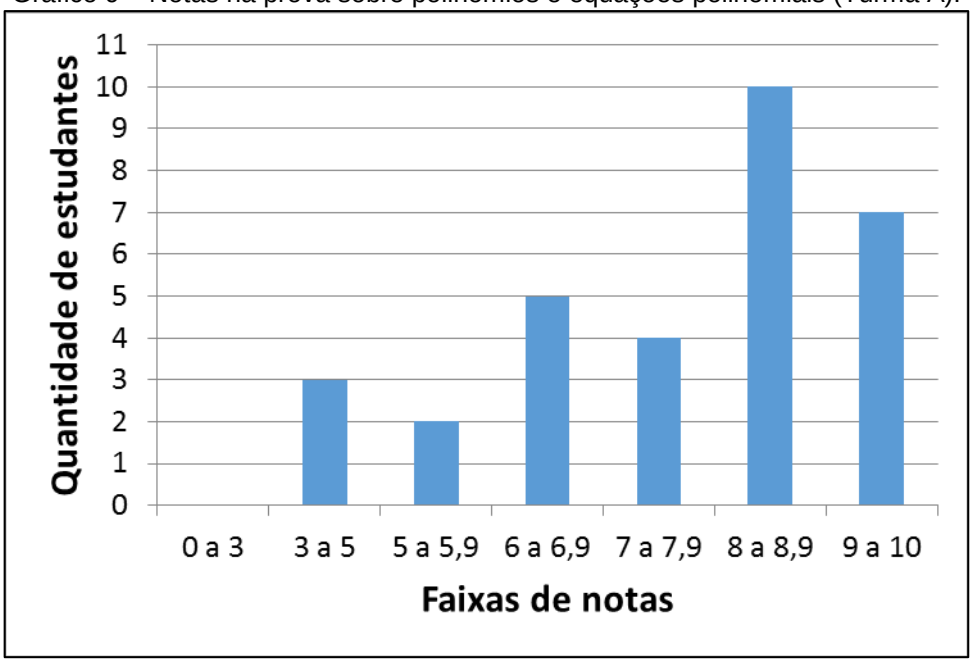
Fonte: Dados da pesquisa.

A turma A obteve melhores resultados, considerando que para atividade ser realizada o estudante precisava ter um aproveitamento de 75%. Entretanto em ambas as turmas mais de 50% dos estudantes, com exceção de divisão de polinômios na turma B, realizaram as atividades de recomendação.

5.10 PROVA SOBRE POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS

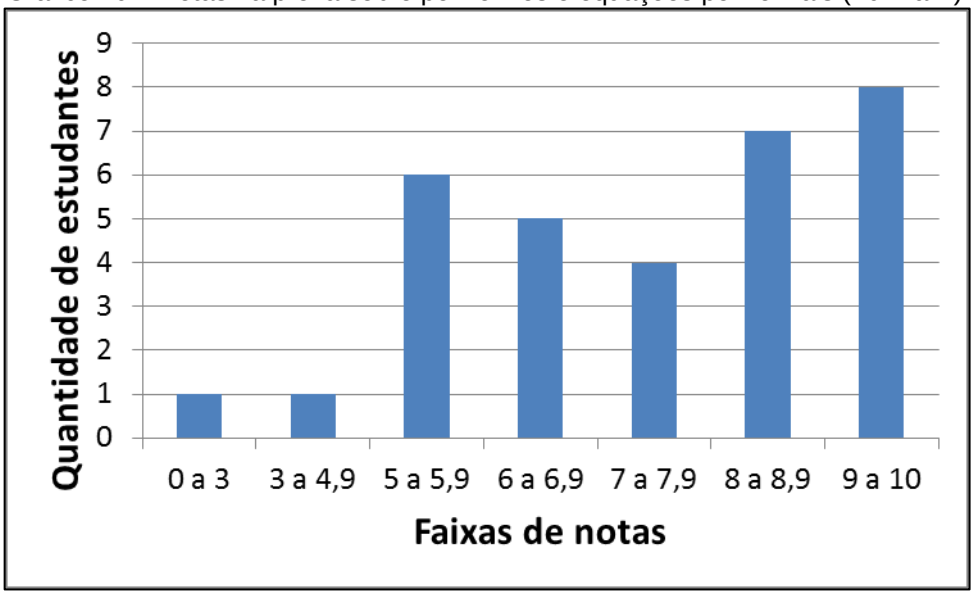
No dia 16 de outubro de 2017 foi aplicada a prova de polinômios e equações polinomiais, realizada em dois períodos, sendo feitos dois modelos de prova uma para a turma A (apêndice I) e outra para a turma B (apêndice J); Os aproveitamentos das provas na turma A e na turma B foram respectivamente 78% e 75% um grande avanço comparando-se ao início da aplicação dos planos e a utilização da plataforma *Khan Academy*. Acompanhe nos gráficos 9 e 10 a distribuição das notas nessas duas turmas.

Gráfico 9 – Notas na prova sobre polinômios e equações polinomiais (Turma A).



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 10 – Notas na prova sobre polinômios e equações polinomiais (Turma B).



Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da correção das provas verificou-se que a maior fonte de erros se deu na determinação das raízes de um polinômio de grau maior que 2 e também referente a análise das suas multiplicidades. Enquanto a parte que envolve a introdução de polinômios, as operações de polinômios e o teorema do resto foram as que obtiveram maior números de acertos na prova. Os principais erros desses últimos não são de procedimento e sim de cálculos básicos da matemática e descuidos no desenvolvimento da questão.

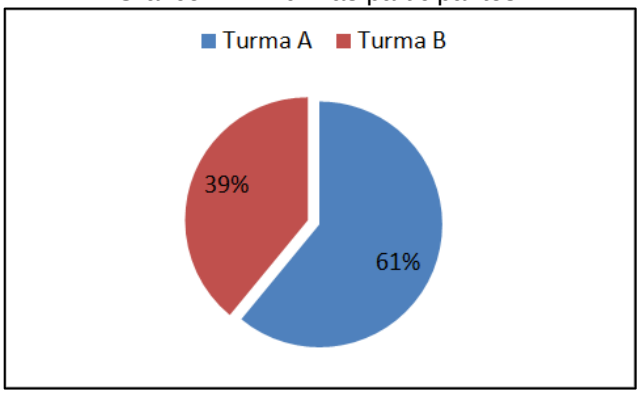
5.11 ANÁLISE DAS ESTREVISTAS REALIZADAS COM OS ESTUDANTES VIA FORMULÁRIO ELETRÔNICO

No final das atividades referentes aos números complexos, polinômios e equações polinomiais foi solicitado que os estudantes respondessem segundo suas concepções a um formulário/entrevista (apêndice K) sobre alguns pontos dessa exploração metodológica de ensino híbrido. Como os diários de bordo foram aplicados de forma igualitária em ambas as turmas, optou-se por realizar as análises de forma conjunta.

De um total de 67 estudantes que tiveram frequência nas aulas e nas atividades, participaram da entrevista 41 estudantes. O que representa um percentual de 61,2% do total de estudantes que participaram das atividades.

A primeira pergunta do formulário se dá de qual turma o estudante pertence, segundo o gráfico 11, a turma A teve maior participação e um indicativo para esta situação, foi o de que eles tiveram um tempo maior para desenvolver o questionário, enquanto na outra turma, tivéramos estudantes deveriam que fazer de fora do período da aula.

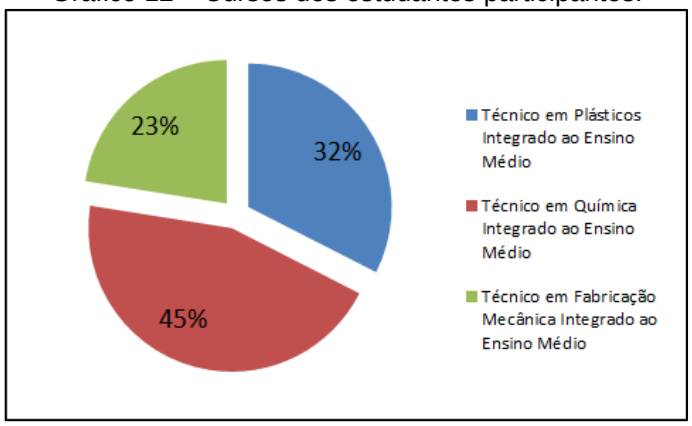
Gráfico 11 – Turmas participantes.



Fonte: Dados da pesquisa.

Como mencionado em nossa amostra, os estudantes são de três diferentes cursos técnicos integrados ao Ensino Médio: Técnico em Fabricação Mecânica, Técnico em Plásticos e Técnico em Química. No Gráfico 12 está a relação de participação por curso.

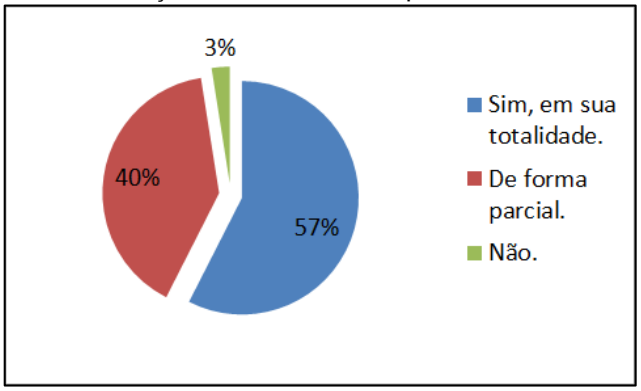
Gráfico 12 – Cursos dos estudantes participantes.



Fonte: Dados da pesquisa.

No questionário, por uma autoavaliação do estudante no desenvolvimento das atividades recomendadas na *Khan Academy* obteve-se um resultado de que mais de 95% os estudantes realizaram de forma parcial ou completa as atividades da *Khan Academy*. No Gráfico 13 demonstra que mais da metade concluíram as atividades da *Khan Academy* em sua totalidade.

Gráfico 13 – Realização de atividades na plataforma *Khan Academy*.



Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida a esta autoavaliação era questionado ao estudante que explicasse sua resposta da pergunta anterior. Então foram obtidos nos três eixos de respostas os que não realizaram, os que realizaram de forma parcial e os que realizaram em sua totalidade.

Um dos estudantes, que marcou a opção de que não fez as atividades plataforma, foi verificado que o estudante as fez de forma parcial, foi constado que sua resposta foi motivada a partir da sua insatisfação quando ao uso dela para avaliação.

Tanto para os estudantes que realizaram as atividades de forma parcial ou em sua totalidade se direcionaram ao impacto do uso da plataforma que foi que esta auxiliava na aprendizagem pós-aula, ou seja, na consolidação dos conteúdos vistos em aula. Os motivos de fazer de forma parcial foram os seguintes: falta de tempo e esquecimento. Ambos podem estar atrelados ao fato de que existem estudantes que trabalham em outros turnos do dia e também ligados a não existência de um tempo específico para estudo.

Na sequência do questionário era solicitado que o estudante se autoavaliasse no desenvolvimento das atividades em sala de aula (Participação em aula, exercícios adicionais do livro didático). Nessa pergunta, houve um equilíbrio, sendo que aproximadamente metade dos estudantes realizou em sua totalidade e outra de forma parcial.

Da mesma forma que foi questionado sobre as atividades da *Khan Academy* era solicitado que o estudante descrevesse o porquê de não realizada e, se realizou, qual os impactos. Os principais indicativos da não realização ou incompleta, se deu pelo fato de acreditarem que as atividades eram em excesso, preguiça, falta de concentração, em julgar não haver necessidade (referindo-se principalmente aos exercícios das listas).

Outro ponto a salientar que alguns estudantes mencionaram o que foi orientado em sala de aula, que pelo livro conter exercícios repetidos, eles deveriam ser autônomos na hora da realização das atividades, na prática onde houver maior dificuldade. Ou seja, a proposta das listas adicionais seriam de forma a complementar aos exercícios da plataforma, funcionando na percepção das dúvidas e na consolidação dos conceitos estudados em sala de aula.

No caso dos estudantes que fizeram as atividades em sala de aula e as listas foi constatado por eles, uma melhora no entendimento da matéria e na maior segurança em atividades avaliativas.

Decidiu-se separar a evolução dos estudantes por conteúdo estudado, para que conseguíssemos fazer mais indicativos, sobre como a plataforma auxiliou neste processo de ensino e aprendizagem. Todavia as respostas dos estudantes, com poucas exceções convergiram nos mesmos aspectos. Os aspectos que mais chamaram a atenção e os quais são explicados a seguir.

- Em relação às diferentes maneiras de resolução: enquanto constataram que a explicação e resolução eram diferentes da sala de aula, o que proporcionou também outras formas o conteúdo, ao mesmo tempo um estudante acredita que isso foi prejudicial no entendimento do conteúdo.
- Quanto à complementação à aulas em que o estudante esteve ausente: que a plataforma auxiliou alguns estudantes em sua atualização e entendimento dos conteúdos passados em algum dia em que o estudante não pode comparecer.
- Em relação aos esclarecimento de fatos e segurança nos exercícios destes conteúdos: muitos estudantes mencionaram que a plataforma serviu como um local para tirar dúvidas e ao mesmo consolidar conhecimentos, dando segurança ao estudante.

Desse modo, percebeu-se que as diferentes metodologias e as ferramentas atreladas a ela tornaram a aprendizagem menos monótona e proporcionando estudos além da sala de aula.

Em busca de uma reflexão dos estudantes era solicitado quais os pontos positivos da abordagem envolvendo os materiais convencionais e a plataforma *Khan Academy*. A partir do mapeamento das respostas referentes os pontos positivos dessa metodologia constatados são os seguintes:

- O material disponível extraclasse: vídeos, artigos, exercícios, exemplos;
- As explicações claras seguidas de exemplos para a compreensão;
- Método diferenciado, que respeita o rendimento de cada um pois além da sala de aula, o estudante poderia consultar a mesma matéria novamente em casa, ensinadas de forma diferente, ou com mais etapas. Outro ponto é que a plataforma proporciona um estudo em que o estudante escolhe onde deve se dedicar mais.

Dentre estes aspectos foi solicitado qual seria o mais positivo em sua concepção, e foi constatado que a maioria dos estudantes acredita na disponibilidade de materiais para consultas em casa, proporcionando diferentes formas para aprender.

Da mesma forma, a seguir estão descritos quais foram os aspectos negativos dessa metodologia:

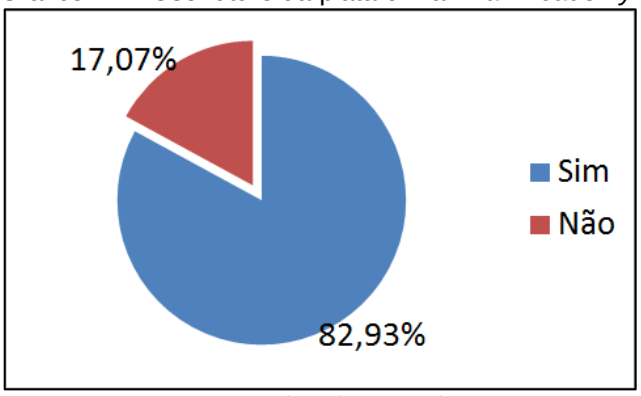
- A quantidade de conteúdos por aula e sua velocidade: A quantidade de conteúdos previstas pelo plano de ensino, dificuldades em tópicos iniciais não deu fluência em algumas atividades, não deixando tempo para que os estudantes compreendam e ou para exercícios em sala de aula.

- Problemas com formato de respostas nas atividades da *Khan Academy*. Alguns estudantes relataram a dificuldade do uso de expoentes em polinômios e da forma trigonométrica. Entretanto foi dada no ambiente virtual instruções para seu uso.
- Método diferenciado do ensinado em sala de aula: principalmente na forma trigonométrica, existem algumas formas diferentes de encontrar o argumento, em sala de aula, foi pensado em utilizar mais o formato a partir do valor do seno e do cosseno e não através da tangente que a plataforma utilizava, o que entra em conflito, enquanto alguns estudantes acreditam ser benéfico ter diferentes métodos para resolver um exercício, alguns estudantes preferem fixar em um mesmo modo.
- Muitas atividades para casa: tanto em recomendações como em exercícios complementares disponibilizados ambiente virtual.

Destes itens o mais negativo, segundo grande parte dos estudantes foi a velocidade e a quantidade de conteúdos em uma mesma aula.

Com relação a continuação do uso da plataforma posterior ao fim das atividades desenvolvidas de números complexos, polinômios e equações polinomiais (Gráfico 14), mais de 80% dos estudantes continuarão usando a *Khan Academy* para seus estudos.

Gráfico 14 – Uso futuro da plataforma *Khan Academy*.



Fonte: Dados da pesquisa.

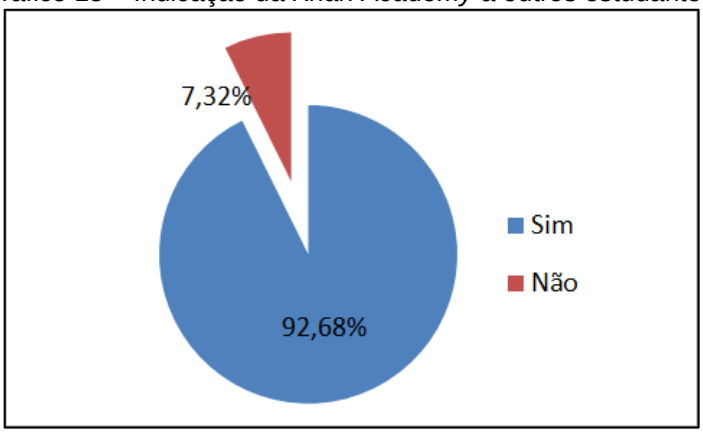
Os porquês da continuação do uso são:

- Possuir material para estudos organizados e a facilidade de acesso;
- A utilização da plataforma apenas para atividades práticas, como uma avaliação com correção simultânea;
- Poder estudar diferentes assuntos/matérias.

Os porquês da não continuação do uso são em torno que os alunos não se adaptaram às funcionalidades da plataforma e a forma com que ela disponibiliza exercícios e conteúdos.

Com relação à recomendação da plataforma para outros estudantes, de acordo com o Gráfico 15, mais de 90% indicariam a plataforma para outros estudantes, o que demonstra que eles tiveram uma boa relação com a plataforma *Khan* Academy.

Gráfico 15 – Indicação da *Khan Academy* a outros estudantes.



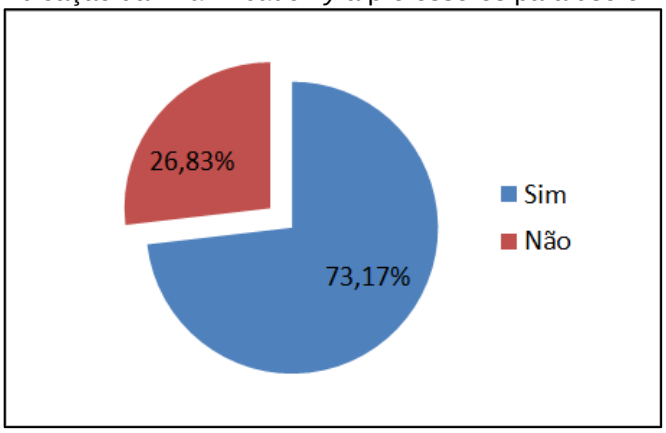
Fonte: Dados da pesquisa.

Para estudantes que pretendem seguir com o uso ou já indicaram a plataforma *Khan Academy* para estudar destacam a ajuda dinâmica que ela pode proporcionar ao estudante, o vasto material para estudos, como artigos e vídeos para consultas e exercícios para estudo da matemática e de outras matérias disponíveis na plataforma. Pelo método, lúdico, parecido com o jogo, exige que o estudante se dedique para que ele consiga maior compreensão. Então ainda sobre os estudantes pode-se notar que a plataforma serve como estudo, mas de forma diferente de como é abordado em sala de aula, pois lá você tem total autonomia do que estudar, quando estudar, quantos exercícios fazerem e tudo sendo corrigido automaticamente e isso totalmente gratuito para as pessoas.

As pessoas que não indicariam, tiveram algum problema com a *Khan Academy*, na realização dos exercícios ou não gostaram do modelo proposto por ela.

Os resultados para o último questionamento, com relação à recomendação a outros professores, estão expostos no Gráfico 16 e analisados em seguida.

Gráfico 16 – Indicação da *Khan Academy* a professores para uso em sala de aula.



Fonte: Dados da pesquisa.

Mesmo num índice um pouco menor de indicação da plataforma, grande parte dos estudantes acreditam que seria interessante o uso da *Khan Academy* em sala de aula por outros professores, pois esta facilita a aprendizagem com todo o material disponível, relacionando com o ritmo de cada estudante e fluência nas aulas e ao mesmo tempo pode proporcionar ao estudante um ensino diferenciado do professor da sala de aula. Salienta-se também que além de facilitar, pode-se consolidar os conceitos estudados em sala de aula. Referente ao lado do professor, pode-se verificar como estão os estudantes nas habilidades desenvolvidas e no monitoramento das atividades da plataforma através dos relatórios.

Os pontos para a não recomendação se dão pela necessidade de um laboratório de informática, onde todos os estudantes pudessem utilizar ao mesmo tempo, pela organização do professor e pelo tempo para estudos ao estudante. Alguns estudantes constataram que ela pode prejudicar em sua forma avaliativa, pois deveria ser usada como forma complementar e não como forma de obrigação da realização das atividades. Então uma sugestão seria, ao início das atividades, se solicitar quais estudantes gostariam que a plataforma fosse considerada parte da nota, fazendo com que outras avaliações tomem mais peso frente a avaliação.

Em relação à última questão foram dadas mensagens para o professor, tanto para aperfeiçoamento como para a continuidade da carreira docente. Mas foram colocados que a plataforma pode se tornar cansativa em caso de uso contínuo, que a plataforma contribuição para a percepção de erros em exercícios, que ela torna aula menos monótona e mais dinâmica e que serve como uma ferramenta complementar. E novamente o mesmo estudante mencionou que seria melhor se o uso não fosse obrigatório.

Em frente a estas constatações se faz necessário uma última análise, pois caso as notas fossem somente da prova o aproveitamento em nota seria menor, pois em todas as atividades a grande maioria da turma realizou mais que 70% das atividades da *Khan Academy,* ou seja, a esta contribuiu, pelos seus materiais e funcionalidades o aumento das notas dos estudantes.

Para análise de todos os Dados da pesquisa foram dados aos estudantes termos de consentimento informado para menores e maiores de 18 anos (apêndice L e M).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho foi norteado para encontrar respostas às questões problema: “Como utilizar a plataforma educacional *Khan Academy* no ensino de números complexos, polinômios e equações polinomiais do Ensino Médio?” e “Como utilizar esta plataforma como um instrumento de avaliação a fim de inferir sobre a aprendizagem dos estudantes?”.

Inicialmente percebeu-se que as TICs são um instrumento importante e que garante utilização quando estamos falando dos novos estudantes, denominados nativos digitais. Entretanto, essa mediação entre as TICs e o ensino não é uma tarefa fácil, devido ao fato de que muitas vezes estes estudantes vejam as tecnologias apenas como um instrumento de diversão e descontração e não as utilizam como um aliado a sua aprendizagem. Com este trabalho houve a dinâmica entre a sala de aula, os estudantes e a TICs por meio da plataforma educacional *Khan Academy*.

É possível explorar uma metodologia híbrida que envolva tanto atividades convencionais de quanto as tecnologias digitais personalizadas. Para o ensino de números complexos houve uma condução metodológica e foram utilizados os diferentes artefatos eletrônicos que a *Khan Academy* oferece a seus usuários. Nas aulas foram utilizados artigos, vídeo e exercícios da plataforma como complemento, os quais trouxeram resultados bem positivos sob esta perspectiva metodológica.

Por meio da plataforma *Khan Academy*, os estudantes tinham uma fonte de consulta confiável sobre os conteúdos vistos em sala de aula, explicações em vídeo e em artigos claros e de linguagem simples para aprender e/ou consolidar as atividades desenvolvidas em sala de aula. Ao resolver as atividades percebeu-se que os estudantes sentiram dificuldade na procura de assuntos aprendidos em outros anos, de modo que esse trabalho contribuiu para que o aluno desenvolvesse a autonomia de procurar e se atualizar quanto à matéria. Possuir um professor, que por meio de diálogo, procure esclarecer os fatos se torna fundamental para aprendizagem do estudante, já que o professor não consegue nivelar todos os estudantes de uma sala de aula.

Elenca-se como dificuldades na exequibilidade da proposta apresentada a quantidade (ou existência) de computadores com acesso à internet, ao foco dos estudantes nas atividades *online*, em meio a redes sociais e jogos online. É difícil também realizar a verificação das principais dificuldades dos estudantes semanalmente, devido ao ritmo de sua aprendizagem e da vida de um professor com mais de 2 turmas.

Ao professor pode-se ter uma gama de funcionalidades para monitoramento da turma tanto na percepção de dificuldades como na construção de atividades recuperativas para estudantes. As recomendações são importantes, pois norteiam os estudantes nas

principais atividades que o mesmo deve resolver. Entretanto, o aluno não deve ficar restrito, somente a estas atividades e sim querer buscar subsídios para sua melhor aprendizagem, percebendo no professor a função de mediador deste processo.

Os principais utilizações para os estudantes foram as atividades práticas em forma de recomendação, as quais foram um importante aliado na avaliação dos estudantes e na percepção de suas maiores dificuldades. O professor pode, assim, montar atividades complementares em sala de aula, a fim de suprir as dificuldades destes estudantes, pois nem sempre é possível em turmas com apenas 2 horas e 30 minutos semanais. A plataforma *Khan Academy* pode servir como um instrumento de avaliação final, mas também como uma avaliação processual, através de análises por conteúdos e habilidades.

Com um estudo empírico das ferramentas disponíveis na plataforma educacional *Khan Academy* foi possível coletar indicativos de como o professor pode utilizá-la com seus alunos de uma forma positiva. Nessa perspectiva, deve-se haver uma mediação do professor nas relações entre estudantes, plataforma e conteúdo.

Durante a construção desse trabalho, obteve-se a oportunidade de montar uma oficina na VII Semana Acadêmica da Licenciatura em Matemática, do Instituto Federal do Rio Grande do Sul, *Campus* Caxias do Sul. O objetivo foi de proporcionar um momento de contato, para licenciandos em Matemática e interessados, com a plataforma educacional *Khan Academy* e para conhecer suas ferramentas e utilizá-las para qualificação ou até mesmo para uso em sala de aula, funcionando como uma apresentação da plataforma. Ao final deste trabalho será construído um artigo para submissão em algum evento ou revista científica como forma de divulgação do nosso trabalho.

Como sugestão de estudos futuros, o ensino de Números Complexos somente através da plataforma *Khan Academy* ou somente a partir de outras metodologias e se possível fazer um comparativo da aprendizagem destas com a educação híbrida aqui apresentada. Da mesma forma que houve a aplicação destes conceitos com números complexos, é válida a aplicação desta metodologia em outros conteúdos e em diferentes níveis de ensino. Os resultados obtidos com a aplicação desta metodologia podem ser usados em comparativo com estes aqui apresentados.

REFERÊNCIAS

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI; F. M. **Ensino Híbrido**: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

BARROQUEIRO, C. H.; AMARAL, L. H. O uso das tecnologias da informação e da comunicação no processo de ensino-aprendizagem dos alunos nativos digitais nas aulas de física e matemática. **REnCIMA: Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, São Paulo, v. 2, n. 2, p. 123-143, jul/dez 2011. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/61>. Acesso em: 21 mar. 2017.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: Ensino Médio. Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/acompanhamento-da-frequeencia-escolar/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 03 mai. 2017.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica**: Diversidade e Inclusão. Brasília: Conselho Nacional de Educação: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Continuada Alfabetização, Diversidade e Inclusão, 480 p. 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=17212&Itemid>. Acesso em: 03 mai. 2017.

CORRÊA, P. M. H. **A plataforma *Khan Academy* como auxílio ao ensino híbrido em Matemática**: um relato de experiência. 2016. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT), Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2016. Disponível em: <http://argo.furg.br/?BDTD11085>. Acesso em: 15 mar. 2017.

FERREIRA, M. L. **Álgebra: como as crenças dos professores influenciam na aprendizagem dos alunos.** 2009. 162 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: <www.pg.im.ufrj.br/pemat/14%20Magno%20Ferreira.pdf>. Acesso em: 21 abr. 2017.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

KHAN, S. ***Khan Academy***. 2017. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org>. Acesso em: 05 mar. 2017.

KHAN, S. **Um mundo, uma escola:** A educação reinventada. Rio de Janeiro: Intrínseca LTDA, 2013.

LEMANN, F. ***Khan Academy* – O maior site de matemática do mundo**. Disponível em: <http://www.fundacaolemann.org.br/khan-academy/>. Acesso em: 05 mar. 2017.

LEMANN, F. **Introdução ao Ensino Híbrido**: personalização e tecnologia na educação. Disponível em: <http://www.fundacaolemann.org.br/ensino-hibrido/>. Acesso em: 20 out. 2017.

MENEGAIS, D. A. F. N. **A formação continuada de professores de matemática: uma inserção tecnológica da plataforma *Khan Academy* na prática docente.** 2015. 201 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/122036>. Acesso em: 06 mar. 2017.

MICHAEL, R. N. **Uso de Vídeos no Ensino de Matemática: E a tecnologia na Sala de Aula**. 2012. 39f. TCC (Graduação) – Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/54873>. Acesso em: 11 abr. 2017.

PEDROSO, C. M. R. **O uso das tecnologias da informação e comunicação como auxílio ao ensino-aprendizagem de matemática.** 2011. 107 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/37110>. Acesso em: 04 abr. 2017.

PERIUS, A. A. B. **A tecnologia aliada ao ensino de matemática**. 2012. 55f. TCC (Especialização em Mídias na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Cerro Largo, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/95906>. Aceso em: 25 abr. 2017.

REIS NETO, R. M. **Alternativa metodológicas para o ensino e aprendizagem de números complexos: uma experiência com professores e alunos.** 2009. 142 f. Dissertação (Metrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_ReisNetoR_1.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2017.

ROSA, R. Trabalho docente: dificuldades apontadas pelos professores no uso das tecnologias. **Revista Encontro de Pesquisa em Educação**, Uberaba, v.1, n.1, p. 214-227, out. 2013. Disponível em: <http://revistas.uniube.br/index.php/anais/article/view/710>. Acesso em: 22 mar. 2017.

SENA, I. V. O. **Aprendendo Matemática, através do "*Khan Academy*".** 2014. 45f. Monografia (Especialização em Fundamentos da Educação: Práticas Pedagógicas Interdisciplinares) – Universidade Estadual da Paraíba, Princesa Isabel, 2014. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/8702> Acesso em: 12 abr. 2017.

SILVA FILHO, A. M.; DELGADO. M. V. M. A Sobrecarga da informação na era da internet. **Revista Urutágua**, Maringá, v.1, n. 2, jul. 2001. Disponível em: <http://www.urutagua.uem.br//02_internet.htm>. Acesso em: 04 nov. 2017.

SOUZA, D. O. **Ensino de matemática com o uso das TIC.** 2015. 41f. Monografia (Especialização em Mídas na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/133978>. Acesso em: 21 out. 2017.

SOUZA, J. C.; SOUZA, C. V. Rede Social Educacional: Uma análise do *Khan Academy*. In: CONGRESSO REGIONAL SOBRE TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO, 2016, Natal. **Anais do Congresso Regional sobre tecnologias na educação.** Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2014. Disponível em: <http://ceur-ws.org/Vol-1667/>. Acesso em: 12 abr. 2017.

TAVARES, W.; PAULA, H. C.; LIMA, M. A.; BARBOSA, F. V. *Khan Academy*: Uma abordagem da escola construtivista ou o uso de Novas ferramentas na abordagem da escola tradicional da educação?. **Renote: Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 10, n.1, jul. 2012. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/30852>. Acesso em: 23 abr. 2017.

APÊNDICE A – Diário de bordo 1

INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul | Campus Caxias do Sul

Licenciatura em Matemática
Professora: Kelen Berra de Mello
Disciplina: Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental

Diário de Bordo 1

Nome do Estagiário: Eduardo Boff Ribeiro

Instituição que realiza o Estágio: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Caxias do Sul.

Série/Ano: 3º Ano do Ensino Médio

Conteúdo a ser abordado: Conjunto dos Números Complexos, Introdução aos Números Complexos, Forma Algébrica, Conjugado, Plano Complexo.

Tempo estimado (número de aulas): 2h30 min (3 aulas)

Previsão das datas das aulas: Turma A: 07/08/17 / Turma B: 07/08/17 e 10/08/17

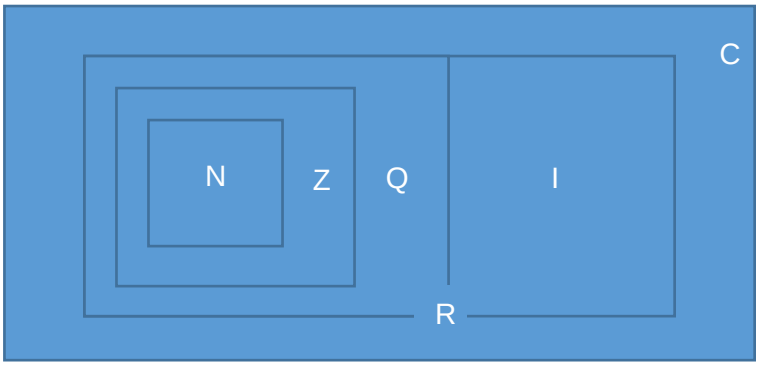
Planejamento das aulas:

Introdução aos Números Complexos:

Inicialmente será dada uma contextualização dos Números Complexos a partir dos conjuntos Numéricos.
Naturais = {0, 1, 2, 3, 4, ...}
Para que a subtração fosse sempre possível expandiu-se e obtemos o conjunto dos Inteiros
Inteiros = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}
Para que a divisão sempre fosse possível expandiu-se e obtemos o conjunto dos Racionais, que são os números que podemos colocar em forma de fração, ou seja, com numerador e denominador inteiros.
Racionais = {x=a/b, com a $\in Z$, b $\in Z^*$}
Existem números que não podemos colocar em forma de fração, então surgem os números Irracionais. Exemplo $\sqrt{2}$
Da união dos conjuntos Racionais e dos Irracionais obtém-se o conjunto dos números Reais

No conjunto dos Números Reais não está definida a raiz de índice par para números negativos, e assim surge o Conjunto dos Números Complexos, os quais serão estudados de forma mais aprofundada nas próximas aulas.

Ao decorrer será construído o seguinte diagrama



Exemplo Introdutório:

$x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1 \rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$

Esse número não pertence ao conjunto dos reais e por isso a necessidade de estudar os números complexos

A unidade imaginária:

Para representar um número imaginário, criou-se o símbolo i

Pela definição de multiplicação de números complexos a multiplicação i por i resulta em -1, ou seja, a seguinte igualdade é verdadeira.

$$i^2 = -1$$

e portanto

$$i = \sqrt{-1}$$

Potências da unidade imaginária. – Vídeo Coletivo

Khan Academy:

Introdução aos números imaginários - https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-the-imaginary-numbers/v/introduction-to-i-and-imaginary-numbers

Início do Vídeo

Lembrando que:

Qualquer número elevado na zero é 1, podemos expandir esse resultado para os números complexos, ou seja, $i^0=1$.

Qualquer número elevado na 1 é ele mesmo, podemos expandir esse resultado para os números complexos, ou seja, $i^1=i$

Pela definição da multiplicação de números imaginários obtemos que $i^2= -1$

**Obtendo i^3 e potências maiores da unidade*

Como o produto de duas potências de mesma base o resultado é a base elevada na soma de cada um dos expoentes podemos escrever $i^3=i^2.i = -1.i = -i$

Da mesma forma o $i^4=i^2. i^2 = (-1).(-1) = 1$

Seguindo o raciocínio e utilizando resultados anteriores,

$i^5= i^3. i^2 = (-i).(-1) = i$

$i^6= i^3. i^3 = (-i).(-i) = -1$

$i^7= i^6. i = (-1).(i) = -i$

$i^8= i^7. i = (-i).(i) = -(-1) = 1$

Fim do Vídeo.

Questionamentos:

1. O que podemos notar com resultado das potências da unidade imaginária?
2. Será que possui alguma sequência lógica?
3. Há uma repetição de resultados?
4. Olhando para esta sequência em quais momentos o resultado é 1?

Até que os estudantes percebam que os múltiplos de 4 dão 1, será dado para eles a generalização da situação.

Como podemos escrever um número que foi dividido por 4?
Pela divisão sabemos que todo número que fora dividido por 4, pode ser escrito como n= 4.q + r onde q é o quociente e r o resto.
(Dependendo da situação será dado um exemplo sobre esse pensamento, para identificar o resto e quociente)
Então vamos tentar elevar a unidade imaginária para esse número que foi divido por 4.

$i^n = i^{4q+r} = i^{4q}\, i^r$
Só que todos os expoentes múltiplos de 4 dão 1, pois $(i^4)^q = 1^q = 1$, ou seja,
$i^{4q}\, i^r = 1.i^r = i^r$
Portanto a unidade imaginária elevada na n é equivalente a escrever a unidade imaginária elevada no resto da divisão de n por 4.

A partir disso: Exemplo: Calcule i^{28}, i^{31}
Exercícios de Prática: Potências da unidade imaginária - https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-the-imaginary-numbers/e/imaginary_unit_powers

---

Raiz de Número Negativo

Sabemos por definição $i^2 = -1$, então poderíamos reescrever $i = \sqrt{-1}$
Nos Números Reais, o produto de duas raízes de mesmo índice é igual ao a raiz de mesmo índice do produto dos radicandos.

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

Então se temos a raiz quadrada de -a, um número negativo, assim podemos reescrevê-lo como

$\sqrt{(-1)a} = \sqrt{a}\sqrt{(-1)} = \sqrt{a}\, i$, pois a>0 e $i = \sqrt{-1}$

Exemplo: Quais são as raízes da equação $x^2 + 4x + 5 = 0$?
a=1, b=4, c=5
Fórmula resolutiva de equação de segundo grau.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo na fórmula resolutiva de equação de segundo grau.
$\Delta = (4)^2 - 4(1)(5) = -4$
Levantar o questionamento que no conjunto dos números reais não haveria solução, pois daria a raiz quadrada de um número negativo, mas agora em âmbito dos números complexos, vamos continuar...

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2.(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2}$$

$$x' = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i$$
$$x'' = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i$$

S= {– 2 + i, – 2 – i}
Assim pode-se fazer a seguinte relação: um número complexo nem sempre é formado

somente por uma parte imaginária, pode-se ter além deste uma parte real, ou seja, um número complexo é formado por uma parte real e uma parte imaginária e juntos eles compõem a forma algébrica de um número complexo.

Exemplo de simplificação de raízes negativas.
Como Simplificar raízes de números negativos - https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-the-imaginary-numbers/v/imaginary-roots-of-negative-numbers

Exercícios de Prática: Praticar: Simplifique raízes de números negativos - https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-the-imaginary-numbers/e/simplify-square-roots-of-negative-numbers

---

Forma Algébrica de um número complexo:

Seja z $\in C$ na forma z=a+bi, com a,b $\in R$. Esta denomina-se a forma algébrica do número complexo.

Dado o número complexo z=a+bi com a,b $\in R$, temos:

- a é chamada parte real de z e indica-se a=Re(z)
- b é chamada parte imaginária de z e indica-se b=Im(z)

Utilizando a lógica o que precisaria acontecer com os coeficientes a e b para obtermos um número
Real? O a um número real e b igual a zero.
e Imaginário puro? O a igual a 0 e b diferente de zero.

Exemplo:
Um número Real: 3
Um número imaginário puro: - 4i
Um número complexo: 7 – 3i, -4i, 2

Exemplo: Identifique a parte real e a parte imaginária dos seguintes números complexos:

a) z=7-8i → Re(z)=7 e Im(z)=-8
b) y=-56,2i+10 →Re(z)=10 e Im(z)=-56,2

Questionamentos: Todo número complexo é real? Todo número real é complexo?

Exercícios de Prática:
Praticar: Partes de números complexos - https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-the-complex-numbers/e/real-and-imaginary-parts-of-complex-numbers
Praticar: Classificação de números complexos - https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-the-complex-numbers/e/the-imaginary-unit-and-complex-numbers

---

Plano Complexo

As atividades referentes ao plano complexo serão construídas a partir da leitura conjunta do texto leitura do texto contido na plataforma *Khan Academy*, disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-the-complex-

plane/a/the-complex-plane

Exercícios de Prática: Praticar: Plote números complexos no plano complexo.
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-the-complex-plane/e/the_complex_plane

---

Igualdade de dois números complexos:
Seja z=a+bi e y=c+di. z e y são iguais se e somente se, a=c e b=d.
Exemplo:
Seja w=3+2i e y=x+2yi e sabe-se que w=y, quanto vale x e y?
w=y→3+2i=x+2yi → x=3 e 2y=2 → x=3 e y=1

Operações com números complexos

Soma e Subtração de Números Complexos

A primeira operação que veremos será a soma e subtração de números complexos.
Definição:
Seja z=a+bi e y=c+di, a operação de soma e subtração são assim definidas:
z+y=(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i
z-y=(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=(a-c)+(b-d)i
Lembrando que um número complexo é formado por parte imaginária e parte real, ou seja, só poderemos operar entre as partes iguais do número complexo.

Em outras palavras: Parte real com parte real, Parte imaginária com parte imaginária

Exemplo 1: Calcule as somas e subtrações envolvendo números complexos:

a) 1+3 = 4
b) 1+5i = 1+5i
c) 1-5i = 1- 5i

Observação: Esses dois últimos ficam iguais, pois não podemos "operar" real com número imaginário.

d) 1 + 5i + 2 + 6i = 1 + 2 + 5i + 6i = 3 + 11i
e) 1 – 3i – 8 + 20i = 1 – 8 – 3i + 20i = -7 + 17i
f) $-1 + 8i + \sqrt{8} - 10i + 3\sqrt{2} - 13i + 12\sqrt{2}\,i = -1 + 5\sqrt{2} - 15i + 12\sqrt{2}\,i = -1 + 5\sqrt{2} + (-15+12\sqrt{2})i$
g) (1 – 3i) + (1 + 2i) = 2 – i
h) (1 – 3i) – (1 + 2i) = 1 – 3 i – 1 – 2i = -5i (Forma algébrica desse número 0-5i)
i) (1 + 32i) – (2 + 32i) = - 1 (Forma algébrica desse número -1 + 0i)

Exercícios de Prática: Praticar: Some e subtraia números complexos
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-adding-and-subtracting-complex-numbers/e/adding_and_subtracting_complex_numbers

Exercícios: Praticar: Some e subtraia números complexos em gráficos
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-adding-and-subtracting-complex-numbers/e/complex_plane_operations

---

Multiplicação de números complexos na forma algébrica
Definição:
Seja z=a+bi e w=c+di. z.w = (a+bi).(c+di)=ac+adi+bci+bdi²

Organizando os termos
z.w=ac+(ad+bc)i+bd(-1)=(ac-bd)+(ad+bc)i

Esse tópico será visto de forma colaborativa no laboratório de informática com os estudantes. Seguindo a explicação dada na plataforma no texto.
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-multiplying-complex-numbers/a/multiplying-complex-numbers
Onde eles anotarão as atividades lá contidas, com observações do professor.
Os estudantes que ainda estão com dúvidas na soma, subtração e multiplicação de Complexos serão orientados a fazer as seguintes atividades de Revisão de Operações com Números Complexos disponível em:

https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-multiplying-complex-numbers/a/complex-number-operations-review

Atividades de Praticar:
Multiplique números complexos (nível básico)
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-multiplying-complex-numbers/e/multiply-complex-numbers-by-real-or-imaginary-numbers

Multiplicação de números complexos
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-multiplying-complex-numbers/e/multiplying_complex_numbers

---

Conjugado de Números Complexos

O conjugado de um número complexo z= a+bi é a-bi.
Ou seja, é o número complexo com a parte imaginária oposta.
Caso queiramos o conjugado de z=a+bi, essa operação pode ser escrito como:
a) $\bar{z}$
b) $\overline{a+bi}$
Exemplo:
Seja z = 2+3i e y=-7-9i e w=8 e h=9i
Calcule $\overline{z+y}$ - $\bar{z}$ + 2i +$\bar{w}$ + $\bar{h}$ = $\overline{(2+3i)+(-7-9i)}$ – (2 – 3i) + 2i + 8 – 9i
=$\overline{-5-6i)}$ – (2 – 3i) + 2i + 8 – 9i = -5 + 6i – 2 + 3i + 2i + 8 – 9i =1+2i

Observação 1:
- ➔ O conjugado de um número real é ele mesmo.
- ➔ O conjugado de um número imaginário puro é o seu oposto.

Observação 2:
Quanto é um número complexo multiplicado pelo seu conjugado?
Seja z = a+bi, a e b Reais
Z. $\bar{z}$ = (a+bi)(a-bi) = a^2 + abi – abi – b^2i^2 =a^2 – b^2i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2+b^2. O RESULTADO É UM NÚMERO REAL!

Para que serve o conjugado?
- ➔ Para auxiliar-nos na divisão de números complexos
- ➔ A multiplicação de um número complexo com seu conjugado é importante, pois

sempre é um número REAL.
Exercício Adicional:
Prove para quaisquer z e y pertencente aos complexos que:
$\bar{z} + \bar{y} = \overline{z + y}$
$\bar{z} \,.\, \bar{y} += \overline{z.y}$
*Dica: Desenvolver ambos os lados e verificar que é uma igualdade.
Atividades de Praticar
Conjugado de números Complexos
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-complex-conjugates-and-dividing-complex-numbers/e/find-conjugates-of-complex-numbers

---

Lista adicional de exercícios de números complexos se encontra em anexo.

Tempo para realização de exercícios da *Khan Academy* e da Lista adicional.

Material visto em aula da *Khan Academy* e que poderão servir como consulta para estudos:

Tópico: O que são números imaginários?

Vídeos:
Introdução aos números imaginários
Potências da unidade imaginária
Como simplificar raízes de números negativos
i como a principal raiz de -1
Textos:
Introdução aos números imaginários
Potências da unidade imaginária
Atividades:
Potências da unidade imaginária
Simplifique raízes de números negativos

Tópico: O que são números complexos?

Vídeos:
Introdução aos números complexos
Como classificar números complexos (exemplo)
Textos:
Introdução de números complexos
Atividades:
Partes de números Complexos
Classificação de números complexos.

Tópico: O plano complexo

Vídeos:
Plotagem de números no plano complexo
Texto:
O plano complexo
Atividades:
Plote números no plano complexo

Tópico: Soma e subtração de números complexos

Vídeos:
Soma de números complexos
Subtração de números complexos
Atividades:
Some e subtraia números complexos
Some e subtraia números complexos em gráficos

Tópico: Multiplicação de números complexos na forma algébrica
Vídeos:
Multiplicação de números complexos
Texto:
Multiplicação de números complexos
Revisão de operações com números complexos
Atividades:
Multiplique números complexos (nível básico)
Multiplicação de números complexos

Tópico Conjugados Complexos e Divisão de números complexos

Vídeos:
Introdução aos conjugados de números complexos
Conjugado de números complexos
Divisão de números Complexos
Atividades:
Conjugado de números Complexos
Divisão de números complexos
Texto:
Revisão sobre divisão de números complexos.

Principais Referências Bibliográficas

[1] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto e Aplicações (Volume 3) 3 ed. São Paulo: Ática, 2010.
[2] IEZZI, Gelson. et al. **Matemática:** Ciência e aplicações (Volume 3) 7 ed. São Paulo: Saraiva: 2013.
[3] KHAN, Salman. **Algebra (All Content):** Números Complexos. Disponível em: < https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers>. Acesso em: 18/07/2017.

_____	_____
Assinatura Supervisora de Estágio	Assinatura Coordenadora de Estágio
Data: ___/___/____	Data: ___/___/____

As listas de exercícios adicionais são exercícios do livro didático utilizado pela instituição.

Fonte: IEZZI, Gelson. et al. **Matemática:** Ciência e aplicações (Volume 3) 7 ed. São Paulo: Saraiva: 2013.

APÊNDICE B – Diário de bordo 2

INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul | Campus Caxias do Sul

Licenciatura em Matemática
Professora: Kelen Berra de Mello
Disciplina: Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental

Diário de Bordo 2

Nome do Estagiário: Eduardo Boff Ribeiro

Conteúdo a ser abordado: Divisão de Números Complexos, Módulo e Argumento e Forma Polar

Tempo estimado (número de aulas): 2h30 min (3 aulas)

Previsão das datas das aulas: Turma A: 14/08/17 / Turma B: 14/08/17 e 17/08/17

Planejamento das aulas:

Divisão de números complexos.

Definição:
Seja z=a+bi e y=c+di.

$$\frac{z}{y}=\frac{z}{y}.\frac{\bar{y}}{\bar{y}}=\frac{(a+bi)}{(c+di)}.\frac{(c-di)}{(c-di)}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{(c^2-d^2i^2)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{(c^2-(-1)d^2)}$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{(c^2+d^2)}=\frac{(ac+bd)}{(c^2+d^2)}+\frac{(bc-ad)i}{(c^2+d^2)}$$

Ou seja, para dividirmos dois números complexos, devemos conservar a divisão e multiplicar pelo conjugado sobre o conjugado do denominador.

Exemplo:
$z=2+3i$ e $y=1-i$

$$\frac{z}{y}=\frac{z}{y}.\frac{\bar{y}}{\bar{y}}=\frac{(2+3i)}{(1-i)}.\frac{(1+i)}{(1+i)}=\frac{2+2i+3i+3i^2}{(1-i+i-i^2)}=\frac{-1+5i}{(1-(-1))}=\frac{-1+5i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{5i}{2}$$

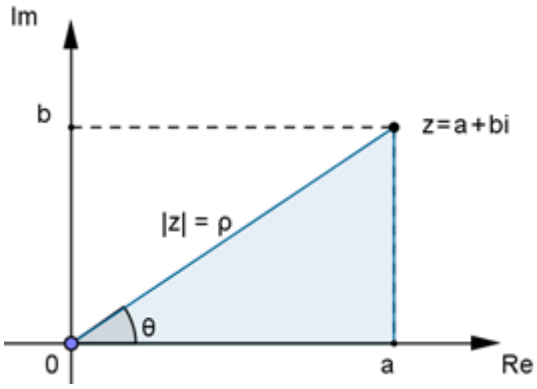
Os estudantes que quiserem poderão fazer o exemplo contido na revisão de divisão de complexos.
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-complex-conjugates-and-dividing-complex-numbers/a/dividing-complex-numbers-review

Atividades de Praticar

Divisão de números complexos
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-complex-conjugates-and-dividing-complex-numbers/e/dividing_complex_numbers

Valor absoluto ou módulo de um número complexo.

Geometricamente o módulo ou valor absoluto de um número complexo é a distância da origem do sistema de coordenadas O ao ponto Z.



Fonte: http://matematicadahoracomplexos.blogspot.com.br/2015/04/modulo-e-representacao-de-um-numero.html

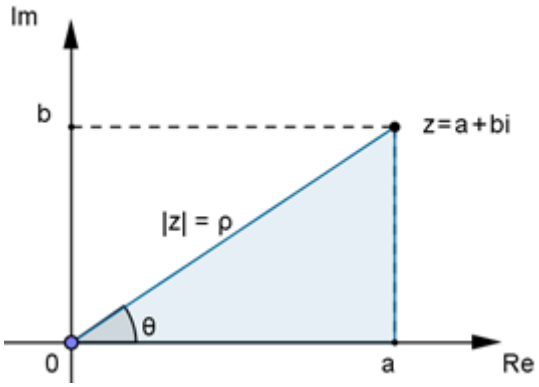
Utilizando a figura podemos notar que temos um triângulo retângulo, no qual sabemos os seus catetos que são respectivamente a parte real e a parte imaginária do número z. Para sabermos o módulo de um número complexo, pode se aplicar o Teorema de Pitágoras.

$|z|^2=a^2+b^2$ e portanto $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Dica: Esqueceu da fórmula, esboce no plano complexo e interprete o problema.

Atividades de Prática: Módulo de Números Complexos
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-absolute-value-and-angle-of-complex-numbers/e/absolute_value_of_complex_numbers

<u>Ângulo ou argumento de um número complexo.</u>



O argumento de um número complexo é o ângulo formado do eixo real positivo com o número complexo e esse ângulo sempre deve estar compreendido entre $0 \leq \theta < 2\pi$
Sabemos por conceitos anteriores que a variação em y sobre a variação em x é dada pela tangente do ângulo. Assim,

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \tan\theta = \left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \theta = arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Lembrando sempre que para $0 \leq \theta < 2\pi$ a tangente de um ângulo é igual em dois ângulos, então deve-se observar em qual dos quadrantes o número complexo se enquadra.

Exemplo: Qual o ângulo do seguinte número complexo?

Z= -1+$\sqrt{3}i$

$$Em\ graus: \theta = arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = -60° \equiv 300°\ ou * \ \theta = arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = 120°$$

$$Em\ radianos: \theta = arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = -\frac{\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}\ ou * \ \theta = arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

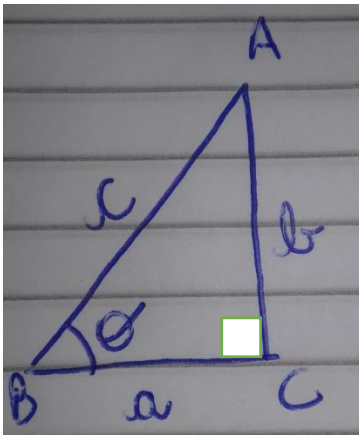
$* \ tan\ \theta = tan\ (\theta + \ 180)$
$* \ tan\ \theta = tan\ (\theta + \ \pi)$

Entretanto um número complexo possui apenas um argumento e pelos ângulos sabemos que pode ser no II ou IV quadrante. Como Re(z)=-1<0 e Im(z)= $\sqrt{3}$>0 então é o ângulo do segundo quadrante e portanto o argumento de z é

$$\theta = arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{2\pi}{3}\ ou\ * \ \theta = arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = 120°$$

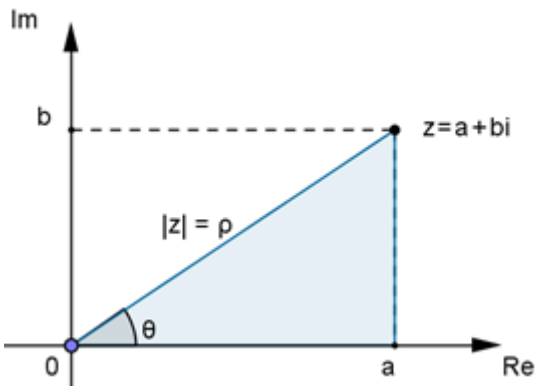
Outra maneira de identificar o ângulo de um número complexo é utilizando a trigonometria do triângulo retângulo.

Relembrando.



cos θ = cat adj/hipotenusa = a/c
sen θ = cat op/hipotenusa = b/c

Trazendo para os complexos



$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$
$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{|z|}$

Então dessa outra maneira o número complexo é z=-1+$\sqrt{3}i$
|z| = 2

$\cos\theta = \frac{-1}{2}$

$$\theta = 120° \; ou \; \theta = 240°$$
$$\theta = \frac{2\pi}{3} \; ou \; \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\theta = 60 \; ou \; \theta = 120$$
$$\theta = \frac{\pi}{3} \; ou \; \theta = \frac{2\pi}{3}$$

E portanto, $\theta = \frac{2\pi}{3} \; ou \; \theta = 120°$.

→Será feito o desenho desse número complexo no plano complexo
Atividades de Prática: Ângulos de Complexos: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-absolute-value-and-angle-of-complex-numbers/e/find-the-angle-of-complex-numbers

---

Forma trigonométrica ou polar de um número complexo:

Utilizando as relações trigonométricas do triângulo retângulo e sabendo que a forma algébrica de um número complexo z é da forma a+bi, temos:

$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ → |z|.cos θ = a
$\text{sen}\,\theta = \frac{b}{|z|}$→ |z|.sen θ = b

Substituindo na forma algébrica do número complexo obtermos que z também pode ser representado da seguinte forma:

z= |z|.cos + i |z|.senθ = |z|.(cos θ + i sen θ)

Denominado forma polar ou trigonométrica de um número com complexo z=a+bi

Exemplo: Determinar a forma polar do seguinte número complexo e posteriormente verifique transformando novamente na forma algébrica.

a) z= 4i → a=0 e b=4 →|z|=4

arctan (b/a) = arctan (4/0), não existe divisão por zero, então se pode analisar onde a tangente não existe que é,

$$\theta = \frac{\pi}{2}\ ou\ \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Como o b>0 então estamos falando do $\theta = \frac{\pi}{2}$

Portanto a forma trigonométrica de z=4i é da forma z=| |z|.(cos θ + i sen θ), utilizando os dados encontrados

z=4.(cos $\frac{\pi}{2}$ + isen$\frac{\pi}{2}$)

Outra forma de encontrar a forma trigonométrica é utilizando as relações seno e cosseno da seguinte forma:

Como:

cos $\theta = \frac{a}{|z|}$

sen $\theta = \frac{b}{|z|}$

Então dessa outra maneira o número complexo é z=4i

|z| = 4

cos $\theta = \frac{0}{4}$=0

$$\theta = 90°\ ou\ \theta = 270°$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}\ ou\ \theta = \frac{3\pi}{2}$$

sen $\theta = \frac{4}{4}$=1

$$\theta = 90\ º$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

E portanto, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$ou\ \theta = 90°$.

Então: z=4i pode ser escrito z=4.(cos $\frac{\pi}{2}$ + isen$\frac{\pi}{2}$)

Verificando:

z= 4.(0 + i.1) =4.i
Verificado!

Atividade de Prática: Números Complexos a partir do valor absoluto e ângulo.
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-absolute-value-and-angle-of-complex-numbers/e/find-complex-numbers-according-to-absolute-value-and-angle

Atividade de Prática: Formas Polar e retangular de números complexos
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-polar-form-of-complex-numbers/e/rectangular-and-polar-forms-of-complex-numbers

---

Lista adicional de exercícios de números complexos se encontra em anexo.

Tempo para realização dos exercícios da *Khan Academy* e da lista adicional

---

Tópicos da *Khan Academy* sobre o assunto, como material suporte a aula e para estudos.

Tópico Conjugados Complexos e Divisão de números complexos

Vídeos:
Introdução aos conjugados de números complexos
Conjugado de números complexos
Divisão de números Complexos
Atividades:
Conjugado de números Complexos
Divisão de números complexos
Texto:
Revisão sobre divisão de números complexos.

Tópico: Valor absoluto e ângulo de números complexos;
Vídeos:
Módulo de números complexos
Valor absoluto e ângulo de números complexos
Textos:
Revisão do módulo e ângulo de números complexos
Atividades:
Módulo de números complexos
Ângulos de números complexos
Números complexos a partir do valor absolto e ângulo

Tópico: Forma polar de números complexos;

Vídeos:
Formas polar e retangular de números complexos
Textos:
Revisão das formas dos números complexos
Atividades:
Formas polar e retangular de números complexos

Principais Referências Bibliográficas

[1] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto e Aplicações (Volume 3) 3 ed. São Paulo: Ática, 2010.
[2] IEZZI, Gelson. et al. **Matemática:** Ciência e aplicações (Volume 3) 7 ed. São Paulo: Saraiva: 2013.
[3] KHAN, Salman. **Algebra (All Content):** Números Complexos. Disponível em: < https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers>. Acesso em: 18/07/2017.

Assinatura Supervisora de Estágio	Assinatura Coordenadora de Estágio
Data: ___/___/____	Data: ___/___/____

As listas de exercícios adicionais são exercícios do livro didático utilizado pela instituição.

Fonte: IEZZI, Gelson. et al. **Matemática:** Ciência e aplicações (Volume 3) 7 ed. São Paulo: Saraiva: 2013.

APÊNDICE C – Diário de bordo 3

INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul | Campus Caxias do Sul

Licenciatura em Matemática
Professora: Kelen Berra de Mello
Disciplina: Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental

Diário de Bordo (1)

Nome do Estagiário: Eduardo Boff Ribeiro

Conteúdo a ser abordado: Operações com números complexos na forma polar e exponencial

Tempo estimado (número de aulas): 2h30 min (3 aulas)

Previsão das datas das aulas: Turma A: 21/08/17 e 28/08/17 Turma B: 21/08/17, 24/08, 28/08/17 e 31/08/17.

Planejamento das aulas:

<u>Operações na forma trigonométrica.</u>

<u>Soma e Subtração na forma trigonométrica</u>

→ Transforma na forma algébrica e resolve.

Exemplo: Seja z=2.(cos 210° + i sen 210°) e y=4.(cos $\frac{5\pi}{6}$ + i sen $\frac{5\pi}{6}$), calcule z+y

z=2.(cos 210° + i sen 210°)=2.(-cos 30° - i sen 30°) = $2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1i}{2}\right)=-\sqrt{3}-i$

y=3.(cos $\frac{5\pi}{6}$ + i sen $\frac{5\pi}{6}$)=3.(-cos $\frac{\pi}{6}$ + i sen $\frac{\pi}{6}$)=4. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1i}{2}\right)=-2\sqrt{3}+2i$

Logo, z+y = $\left(-\sqrt{3}-i\right)+\left(-2\sqrt{3}+2i\right)=-\sqrt{3}-2\sqrt{3}-i+2i=-3\sqrt{3}+i$

<u>Multiplicação de Números Complexos na forma trigonométrica.</u>

Sejam z=|z|.(cos θ + i sen θ) e y=|y|.(cos α + i sen α)

z.y = |z|.|y| [cos θ cos α + (i^2).sen θ sen α + i cos θ sen α + i cos α sen θ]
= |z|.|y| [cos θ cos α − sen θ sen α + i (cos θ sen α + cos α sen θ)]
Só que da trigonometria a soma dos arcos do cosseno e do seno são respectivamente, cos (θ+ α) = cos θ cos α − sen θ sen α e sen (θ+ α)= (cos θ sen α + cos α sen θ)
E portanto,
z.y = |z|.|y| (cos (θ+ α) + isen (θ+ α))
Assim a multiplicação de dois números na forma trigonométrica multiplica-se os módulos e soma-se os argumentos. Lembre sempre que $0 \leq \theta < 2\pi$ ou $0° \leq \theta < 360°$.
Obs: Caso o ângulo seja menor que 0 ou maior ou igual a 2 π, devemos encontrar um arco côngruo a esse.

Exemplo:
Dado z=3(cos 40º+isen40º), w=5(cos 20º+isen20º) obtenha z.w na forma trigonométrica e na forma algébrica. Sendo que $0 \leq \theta < 2\pi$ ou $0° \leq \theta < 360°$
z.w=3(cos40º+isen40º).5(cos 20º+isen20º)
=15. (cos60º+isen60º)

$=15.(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2})=\frac{15}{2}+\frac{15\sqrt{3}i}{2}$

<u>Divisão de Números Complexos na forma trigonométrica.</u>

Sejam z=|z|.(cos θ + i sen θ) e y=|y|.(cos α + i sen α) e sabendo que cos $(\theta\text{-}\alpha) =$ cos θ cos $\alpha +$ sen θ sen α e sen $(\theta\text{-}\alpha)$= (cos θ sen α - cos α sen θ).
E portanto,

$$z/y = \frac{|z|.(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)}{|y|.(\cos\alpha + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha)}.\frac{|z|}{|y|}.\frac{(\cos\alpha - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha)}{(\cos\alpha - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha)} = \frac{|z|}{|y|}.\frac{[\cos\theta\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{i}\,(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta)]}{(\cos^2\alpha - \mathrm{i}\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha + \mathrm{i}\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - (i)\mathrm{sen}^2\,\alpha}$$

$$= \frac{|z|}{|y|}\frac{\cos(\theta-\alpha)+i\mathrm{sen}\,(\theta-\alpha)}{(\cos^2\alpha+\mathrm{sen}^2\alpha)} = \frac{|z|}{|y|}\cos(\theta-\alpha)+i\mathrm{sen}\,(\theta-\alpha).$$

Assim divisão de dois números complexos na forma trigonométrica divide-se o módulo do primeiro pelo segundo módulo e a diferença dos dois na mesma ordem. Lembre sempre que $0 \leq \theta < 2\pi$ ou $0° \leq \theta < 360°$.
Obs: Caso o ângulo seja menor que 0 ou maior ou igual a 2 π, devemos encontrar um arco côngruo a esse.

Exemplo:
Dado z=3(cos 40º+isen40º), h=2+2i obtenha z/h na forma trigonométrica. Sendo que $0 \leq \theta < 2\pi$ ou $0° \leq \theta < 360°$

z/h não é direto, pois os valores de cosseno e seno não são exatos, então melhor trabalharmos com ambas na polar. E então temos que transformar h=2+2i na trigonométrica.
|h|=$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
a=2
b=2
cos $\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\theta = 45° \; ou \; \theta = 225°$$
$$\theta = \frac{\pi}{4} \; ou \; \theta = \frac{5\pi}{4}$$

sen $\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\theta = 45 \; ou \; \theta = 135$$
$$\theta = \frac{\pi}{4} \; ou \; \theta = \frac{3\pi}{4}$$

E portanto, $\theta = \frac{\pi}{4} \; ou \; \theta = 45°$. Logo h=$2\sqrt{2}$ (cos 45º+isen45º)
Assim z/h $= \frac{3(\cos 40º+\mathrm{isen}40º).}{2\sqrt{2}\,(\cos 45º+\mathrm{isen}45º)} = \frac{3\sqrt{2}(\cos -5º+\mathrm{isen}-5º).}{4} = \frac{3\sqrt{2}(\cos 355º+\mathrm{isen}355º).}{4}$

Atividade de Prática: Multiplicação e Divisão de Números Complexos na forma Polar
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-multiplying-and-dividing-complex-numbers-in-polar-form/e/multiplying_and_dividing_complex_number_polar_forms

Potências de Números Complexos na forma polar

Fórmula de Moivre: Um número complexo z=|z|(cos θ+isen θ) quando elevado a potência n, ou seja, z^n =$|z|^n$ (cos $(n\theta)$+isen$(n\theta)$)

Dedução a partir da multiplicação de complexos na forma polar:
z=|z|(cos θ+isen θ)
z^n =z.z.z.z... = $|z||z||z||z|$ ... . (cos $(\theta+\theta+\theta+\cdots)$+$isen(\theta+\theta+\theta+\cdots)$)
(n fatores z) (n fatores |z|) $(n\ parcelas\ \theta)$ $(n\ parcelas\ \theta)$
Portanto:
z^n =$|z|^n$ (cos $(n\theta)$+isen$(n\theta)$)

Exemplo: z=2(cos(60º)+isen(60°), calcule z^8. Obedecendo $0° \leq \theta < 360°$
Utilizando a forma de Moivre:
z^8=2^8(cos(8.60°)+isen(8.60°)=256(cos(480°)+isen(480°))

480º é maior que 360º, então precisaremos ver quantas voltas de 360º para vermos qual ângulo côngruo a esse entre $0° \leq \theta < 360°$;

480° = 1 volta de 360° + 120°.

Logo 480º≡120°.

Assim: z^8=256(cos(120°)+isen(120°))

Atividades de Prática: Potências de Números Complexos
https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-complex-numbers/alg-multiplying-and-dividing-complex-numbers-in-polar-form/e/powers_of_complex_numbers_1

Observação: Ao longo deste plano de aula, foram realizados outros exemplos devido ao rendimento das turmas.

Lista adicional de exercícios de números complexos se encontra em anexo. (Colocar Lista adicional)

Tempo para realização dos exercícios da *Khan Academy* e da lista adicional

---

Tópicos da *Khan Academy* sobre o assunto, como material suporte a aula e para estudos.

Tópico: Multiplicação e divisão de números complexos na forma polar;

Vídeos:
Divisão de números complexos: forma polar e exponencial
Potências de números complexos
Equações com números complexos x^3=1

Textos:
Visualização da multiplicação de números complexos
Visualização de potências de números complexos

Revisão da forma polar de número complexo **Atividades:** Multiplicação e divisão de números complexos na forma polar Potências de números complexos

_____ _____

Assinatura Supervisor de Estágio Assinatura Coordenador de Estágio

Data: ___/___/____ Data: ___/___/____

As listas de exercícios adicionais são exercícios do livro didático utilizado pela instituição.

Fonte: IEZZI, Gelson. et al. **Matemática:** Ciência e aplicações (Volume 3) 7 ed. São Paulo: Saraiva: 2013.

APÊNDICE D – Prova sobre números complexos: Turma A

INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul | Campus Caxias do Sul

Disciplina: Matemática III
Professor: Eduardo Boff Ribeiro
Estudante:_____

Nota:	Peso: 10 pontos

PROVA 2 – Números COMPLEXOS – 2º Trimestre de 2017
(Questões não justificadas não serão consideradas)

1 Dados os números $z = 2i + 3$, $y = -\pi$, $w = \sqrt{-7}$ e $p = \sqrt{16}$, classifique-os:
   a) Reais:
   b) Imaginário puro:
   c) Complexos:

2 Simplifique o máximo possível a raiz quadrada $\sqrt{-450}$.

3 Resolva no conjunto dos números complexos a seguinte equação: $x^2 + (\sqrt{3})x + 7 = 0$.

4 Encontre o valor das seguintes potências da unidade imaginária:
   a) $i^{143} + i^{401}$ b) $(i^{129} - i^3)^5$

5 Dados os números complexos a seguir, calcule o que é solicitado:
$z = 1 - 2i$; $y = 3 + 4i$; $x = 2 + 5i$; $h = -2i$

$v = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$; $u = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$; $t = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + isen\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$;

   a) $z + y - x - v =$
   b) $u.t =$
   c) $\frac{u}{t} =$
   d) $\bar{y} + h =$
   e) $|t|.|y|.|h|$
   f) $x.z$

6 (UPF– RS Adaptada): Quanto ao número complexo $z = \frac{-7-7i}{1+i}$ assinale como verdadeiro ou falso as alternativas abaixo, justificando-as:
   a) ( ) Escrito na forma algébrica é $z = -8i$
   b) ( ) O módulo de z é 64.
   c) ( ) z^2 é um número imaginário puro
   d) ( ) O módulo de z é maior que o módulo de $y = 1 + \sqrt{2}i$

7 (UFRGS – Adaptada): A diferença entre os ângulos dos números complexos z^4 e $z = \sqrt{3} + i$ é:
   a) π/6 b) π/4 c) π/3 d) π/2 e) π

8 Represente no plano complexo (Argand-Gauss) com as informações solicitadas dos números complexos:
   a) $z = -4 - 4i$ (Módulo e par ordenado)
   b) Seja y com argumento $\frac{\pi}{4}$ e módulo $4\sqrt{2}$ (Módulo, par ordenado e argumento)

9 Determine a parte real e a parte imaginária dos seguintes números complexos:
   a) $u = 33i$ Re(u)=_____ Im(u)=_____
   b) $z = 3 - i\sqrt{3}$ Re(z)=_____ Im(z)=_____
   c) $y = -\sqrt{\pi}$ Re(y)=_____ Im(y)=_____
   d) $w = (1 + 2i)(1 + 2i)$ Re(w)=_____ Im(w)=_____

10 Transforme na forma trigonométrica o número complexo z, tal que, Re(z)=$-2\sqrt{3}$ e Im(z)=2.

11 Calcule $z^5.y^{50}$ sabendo que $z = 2(\cos 200° + isen200°)$ e $y = (\cos 10° + isen10°)$, determinando a forma trigonométrica ($0° \leq \theta < 360°$). Em seguida escreva na forma algébrica o resultado encontrado.

12 Desafio: Encontre o valor de $z.y.(1 + a^2)$ na forma mais simplificada possível, considerando que:
   - $z = (2 + mi)(1 - i)$ e z é um número real.
   - $y = \frac{1+bi}{1-ai}$ e y é um número imaginário puro
   - $a + b = 3$

APÊNDICE E – Prova sobre números complexos: Turma B

INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul | Campus Caxias do Sul

Disciplina: Matemática III

Professor: Eduardo Boff Ribeiro

Nota:	Peso: 10 pontos

Estudante:_____

PROVA 2 – NÚMEROS Complexos – 2º Trimestre de 2017

(Questões não justificadas não serão consideradas)

1 Dê um exemplo, se existir, de um número que seja:

a. Complexo, não sendo imaginário puro nem real:

b. Imaginário puro e real:

c. Real e complexo:

d. Imaginário puro que tenha parte imaginária igual a $-\pi$.

2 Sabendo que $a = 144$ e $b = -3$, simplifique o máximo possível a raiz $\sqrt{a.b}$.

3 Resolva no conjunto dos números complexos a seguinte equação: $x^2 + (\sqrt{3})x + 3 = 0$.

4 Encontre o valor das seguintes potências da unidade imaginária:

a. $i^{14} - i^{160}$

b. $(i^{129} - i^{35})^5$

5 Dados os números complexos, calcule o que é solicitado:

$z = 1 + 2i$; $y = 3 - 4i$; $x = 2 + 5i$; $h = 2i$

$v = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$; $u = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$; $t = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + isen\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$;

a) $z + y - x - v =$

b) $u.t =$

c) $\frac{u}{t} =$

d) $\bar{y} - h =$

e) $|t|.|y|.|h| =$

f) $x.y$

6 (UPF– RS Adaptada): Quanto ao número complexo $z = \frac{-3-i}{-2+i}$ assinale como verdadeiro ou falso as alternativas abaixo, justificando-as:

a. ( ) Escrito na forma algébrica é $z = 1 - i$

b. ( ) O módulo de z é $\sqrt{2}$.

c. ( ) z^2 é um número real.

d. ( ) O módulo de z é maior que o módulo de $y = 1 + \sqrt{3}i$

7 (UFRGS – Adaptada): A diferença dos ângulos dos números complexos z^4 e $z = \sqrt{3} + i$ é:

f) π/6 g) π/4 h) π/3 i) π/2 j) π

8 Represente no plano complexo (Argand-Gauss) com as informações solicitadas dos números complexos:

a. $z = -1 - i$ (Módulo e par ordenado)

b. Seja y com argumento $\frac{\pi}{4}$ e módulo $4\sqrt{2}$. (Módulo, par ordenado e argumento)

9 Determine a parte real e a parte imaginária dos seguintes números complexos:

a. $u = -12$ Re(u)=_____ Im(u)=_____

b. $z = 2 - i\sqrt{7}$ Re(z)=_____ Im(z)=_____

c. $y = -2\sqrt{2\pi}$ Re(y)=_____ Im(y)=_____

d. $w = (1 + 3i)(1 - 3i)$ Re(w)=_____ Im(w)=_____

10 Transforme na forma trigonométrica o número complexo z, tal que, Re(z)=$-3\sqrt{2}$ e Im(z)= $3\sqrt{2}$.

11 Calcule $z^{10}.y^{100}$ sabendo que $z = 2(\cos 100° + isen100°)$ e $y = (\cos 5° + isen5°)$, determinando a forma trigonométrica ($0° \leq \theta < 360°$). Em seguida escreva na forma algébrica o resultado encontrado.

12 Desafio: Encontre o valor de $z.y.(1 + a^2)$ na forma mais simplificada possível, considerando que:

- $z = (2 + mi)(1 - i)$ e z é um número real.
- $y = \frac{1+bi}{1-ai}$ e y é um número imaginário puro.
- $a + b = 3$

APÊNDICE F – Diário de bordo 4

INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul | Campus Caxias do Sul

Licenciatura em Matemática
Professora: Kelen Berra de Mello
Disciplina: Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental

Diário de Bordo 4

Nome do Estagiário: Eduardo Boff Ribeiro

Conteúdo a ser abordado: Definição, Função Polinomial, Valor Numérico, Raiz de um polinômio, Polinômios iguais e Soma, Subtração e Multiplicação de Polinômios

Tempo estimado (número de aulas): Turma A: 2h30 min (3 aulas) Turma B: 2h30 (3 aulas)

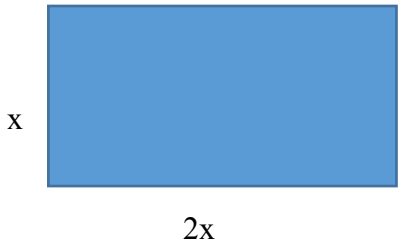
Previsão das datas das aulas: Turma A: 18/09/17 /Turma B: 18/09/17 e 21/09/17

Planejamento das aulas:

<u>Introdução de polinômios:</u>

Introdução:

1) Considere uma propriedade que possui o comprimento o triplo da largura. Expresse a área e o perímetro na forma algébrica.



Perímetro: $P(x)= x + x + 2x + 2x = 4x$
Área: $A(x) = x.2x = 2x^2$

Esses são exemplos de polinômios ou expressões polinomiais.

<u>Definição de polinômio ou expressão polinomial:</u>

Um polinômio ou expressão polinomial na indeterminada complexa x é uma expressão dada por:
$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x+a_0$

- Os números complexos a_n, $a_{n-1,...,}$ a_1,a_0 de um polinômio são denominados coeficientes; a_0 é o coeficiente independente do polinômio.
- O expoente n é um número inteiro positivo ou nulo.
- O maior expoente de x, com coeficiente não nulo, é o grau da expressão.
- A indeterminada x pode ser qualquer número complexo.

<u>Coeficiente Dominante:</u>

- É o coeficiente do termo de maior grau do polinômio.

Ex: $3x^4 +-2x^3 - x^2 + x+7$
Logo 3 é o coeficiente de maior grau.

Função polinomial:

Vamos considerar uma função f: C → C, que a cada x pertecendo aos complexos associa o polinômio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x+a_0$. Isto é, $p(x)= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x+a_0$
A função p recebe o nome de **função polinomial.**

Exemplos de funções polinomiais:
$f(x)=3x^2-9$
$g(x)= (2+i)x^3-ix^2+98x+i+3$
$h(x)=ix^7+x^3-(i+3)x+7$

Exemplo: Escreva uma função polinomial em que satisfaça todas essas condição:

a) Seu coeficiente independente seja 8+i
b) Seu coeficiente do termo de grau 5 seja -9
c) O grau da função polinomial seja 8
d) O coeficiente do maior grau seja -4i

Definição de Polinômio nulo:
É aquele polinômio que possui todos os coeficientes iguais a 0, mas por este fato não se define o grau de um polinômio nulo.

Exemplo:
Encontre a, b, c, para que o polinômio abaixo seja nulo.
$(a+b+3)x^2+(a-b+9)x+(c+3)$

Valor Numérico:

Seja α pertencente aos Complexos e p o polinômio definido por $p(x)= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x+a_0$.
O **Valor Numérico de p em** α é igual ao número complexo obtido quando substituímos x por α e efetuamos as operações, isto é:

$P(B)= a_n(\alpha)^n + a_{n-1}(\alpha)^{n-1} + ... + a_2(\alpha)^2 + a_1(\alpha)+a_0$.

Observação: Considerando o polinômio $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x+a_0$, temos que:

- ➔ $P(1) = a_n (1)^n + a_{n-1}(1)^{n-1} + ... + a_2(1)^2 + a_1(1)+a_0 = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1+a_0$. Isto é p(1) é a igual a soma de dos coeficientes do polinômio.
- ➔ $P(0) = a_n (0)^n + a_{n-1}(0)^{n-1} + ... + a_2(0)^2 + a_1(0)+a_0 = a_0$. Isto é p(0) é a igual ao coeficiente independente do polinômio.

Exemplo: Seja os polinômios abaixo definidos.

$f(x)=3x^2-9$
$g(x)= (2+i)x^3-ix^2+98x+i+3$
Determine: f(i) – $g(-1)+g(0)=3i^2-9-((2+i)(-1)^3-i(-1)^2+98(-1)+i+3)+i+3=-12-(-2-i-i-98+i+3)+i+3=-12-(-97-i)+i+3=88+2i$

Raiz de um polinômio
Seja β pertencente aos Complexos e p o polinômio definido por $p(x)= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x+a_0$.

Dizemos que β **é raiz do polinômio** quando p(β)=0, isto é:
$p(\beta)= a_n (\beta)^n + a_{n-1} (\beta)^{n-1} + ... + a_2(\beta)^2 + a_1(\beta)+a_0 = 0$

Exemplo: x=-1 é uma raiz para o polinômio p(x)= x + 1?
Sim, pois p(-1)=-1 + 1=0 , ou seja, p(-1)=0

Exemplo: Sabendo que x=-5 é uma raiz do polinômio $p(x)= x^2+mx-3$, determine o valor de m.
Logo p(-5)=0 → $(-5)^2+m(-5)-3 =0$ → 5m = 22 → m=22/5

Polinômios iguais (ou idênticos)

Definição: Sejam f e g dois polinômios respectivamente definidos por:
$f(x)= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x+a_0$
$g(x)= b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_2x^2 + b_1x+b_0$

Dizemos que f e g são iguais(ou idênticos) quando assumem o mesmo valor numérico para qualquer valor de x.

De outra forma f e g são iguais se e somente se os coeficientes de f e g são ordenadamente iguais, isto é, os coeficientes dos termos de mesmo expoente são iguais:

$a_n= b_n$; $a_{n-1}= b_{n-1}$; ... ; $a_2 = b_2$; $a_1= b_1$; $a_0= b_0$.

Exemplo 1: Determine a, b, c, d sabendo que os polinômios p(x) e q(x) são iguais.
$p(x)= 2x^3-ix^2+98x+i+3$
$q(x)=ax^3+bx^2+98cx+d$

Exemplo 2: Determinar os valores de a e b para os quais ocorre a igualdade: $\frac{(1+x)}{x^2-100} = \frac{a}{x+10} + \frac{b}{x-10}$
Com x≠-10 e x≠10

$$\frac{(1+x)}{x^2-100} = \frac{a}{x+10} + \frac{b}{x-10} \Rightarrow \frac{(1+x)}{x^2-100} = \frac{a(x-10)+b(x+10)}{(x+10)(x-10)}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+x)}{x^2-100} = \frac{ax-10a+bx+10b}{x^2-100} \Rightarrow x+1 = ax-10a+bx+10b$$

$$\Rightarrow x+1 = (a+b)x+(10b-10a)$$

Então pela igualdade de polinômios temos as seguintes igualdades

$$a+b=1$$
$$-10a+10b=1$$

Cuja solução é: $a = \frac{9}{20}$; $b = \frac{11}{20}$

Atividades da *Khan Academy*:

Introdução aos Polinômios: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials#alg-introduction-to-polynomials

Soma e Subtração de polinômios

Na soma e subtração de polinômios, devemos operar com os coeficientes dos termos semelhantes. Exemplo: Sabendo que $p(x) = 2x^3+x^2-58x+4$; $q(x) = 3x^2- 6$; $s(x)= -7x^4+4x^2-8$ e que
$f(x) = p(x) + q(x) - s(x)$, determine $f(x)$ e $f(-1)$.

Exemplo: $f(x) = (2x^3+x^2 – 58x)+(3x^2 – 6) – (–7x^4+4x^2–8)$
$f(x) = 2x^3+ x^2 – 58x + 3x^2 – 6 +7x^4 –4x^2+8$
$f(x) =7x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x^2 – 4x^2 – 58x – 6 +8$
$f(x) = 7x^4 + 2x^3 + 0x^2 – 58x +2$
$f(x) = 7x^4 + 2x^3 – 58x + 2$

Então $f(-1) = 7(-1)^4 + 2(-1)^3 – 58(-1) + 2 = 7 – 2 + 58 + 2 = 65$

Atividades da *Khan Academy* de estudo:

Todos os vídeos sobre este conteúdo, bem como, o artigo sobre a revisão das operações soma e subtração de polinômios.

Link do artigo: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials/alg-adding-and-subtracting-polynomials/a/adding-and-subtracting-polynomials-review

E atividades de prática:

- Soma de polinômios (introdução): https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials/alg-adding-and-subtracting-polynomials/e/adding_and_subtracting_polynomials
- Subtração de polinômios (introdução): https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials/alg-adding-and-subtracting-polynomials/e/subtract-polynomials
- Some e subtração de polinômios: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials/alg-adding-and-subtracting-polynomials/e/add---subtract-polynomials-challenge

<u>Multiplicação de polinômios</u>

Na multiplicação de dois polinômios f e g devemos multiplicar cada termo de f com cada termo de g, somando (subtraindo) os resultados.
Exemplo: Será utilizado artigo da *Khan Academy* multiplicação de binômios por polinômios para introdução do assunto, realizando a leitura conjunta. Realizando as atividades do artigo.
Link: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials/alg-multiplying-polynomials-by-binomials/a/multiplying-binomials-by-polynomials-review

Atividades da *Khan Academy* de estudo:
Todos os vídeos sobre multiplicação de polinômios. Caso os estudantes tenham dificuldade na multiplicação de polinômio por polinômios, serão recomendados atividades adicionais que visem suprir estas dificuldades (multiplicação de monômio por monômio, monômio por binômio, monômio por polinômio, binômio por binômio).

E atividades de prática:

- Multiplicação de binômios por polinômios: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-

home/alg-polynomials/alg-multiplying-polynomials-by-binomials/e/multiplying_polynomials

_____	_____
Assinatura Supervisor de Estágio	Assinatura Coordenador de Estágio
Data: ___/___/____	Data: ___/___/____

As listas de exercícios adicionais são exercícios do livro didático utilizado pela instituição.

Fonte: IEZZI, Gelson. et al. **Matemática:** Ciência e aplicações (Volume 3) 7 ed. São Paulo: Saraiva: 2013.

APÊNDICE G – Diário de bordo 5

INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul | Campus Caxias do Sul

Licenciatura em Matemática
Professora: Kelen Berra de Mello
Disciplina: Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental

Diário de Bordo 5

Nome do Estagiário: Eduardo Boff Ribeiro

Conteúdo a ser abordado: Operações com polinômios (Divisão de Polinômios), Teorema do Resto (Teorema de D'Alembert), Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

Tempo estimado (número de aulas): 2h30 min (3 aulas)

Previsão das datas das aulas: Turma A: 25/09/17 Turma B: 25/09 e 28/09

Planejamento das aulas:

<u>Divisão de polinômios:</u>

Definição: Sejam dois polinômios f(x) e g(x), com g(x) ≠ 0.
Dividir f(x) dividendo por g(x) divisor é determinar dois outros polinômios, q(x) (quociente) e r(x) (resto), que verifiquem as seguintes condições:

- f(x) = g(x) . q(x) + r(x)
- grau de r(x) < grau de g(x) ou r(x)=0 (isto é, r(x) é o polinômio nulo)

Lembrando, no ensino fundamental, aprendemos a dividir dois números naturais, pelo **Método da Chave.**

$$\begin{array}{r|l} 195 & 8 \\ \cline{2-2} -16 & 24 \\ \cline{1-1} 35 & \\ -32 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Observe agora que a divisão está encerrada, pois 3<8. Note que 195 = 8.24 +3
Agora vamos trazer esta ideia para os polinômios:

Sejam f(x) = $6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1$ por $g(x) = 2x^2 + x - 3$
Dispomos o dividendo (f(x)) e o divisor e (g(x))

Passos:
1º Passo: Divide-se o termo de maior grau de f(x) pelo termo de maior grau de g(x):

$$\frac{6x^4}{2x^2} = 3x^2$$

Obtendo assim o 1º termo do quociente q(x).

$$6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 \;\Big|\; \underline{2x^2 + x - 3}$$
$$3x^2$$

2º Passo: Multiplicamos o quociente obtido $(3x^2)$ pelo g(x) e subtraímos de f(x), isso é somamos f(x) com o resultado oposto do resultado obtido. Obtemos um resto parcial.

$$3x^2.(2x^2 + x - 3) = 6x^4 + 3x^2 - 9x^2$$

$$\begin{array}{rl} \cancel{6x^4} - x^3 + 3x^2 - x + 1 & \Big|\; \underline{2x^2 + x - 3} \\ + \underline{\cancel{-6x^4} - 3x^3 + 9x^2} & \quad 3x^2 \\ -4x^3 + 12x^2 - x + 1 & \leftarrow \text{resto parcial} \end{array}$$

3º Passo: Repetindo o procedimento anterior com o resto parcial obtido até que o grau do resto se torne menor que o do divisor (ou o resto seja o polinômio nulo):

$$\frac{-4x^3}{2x^2} = -2x;\; -2x \cdot (2x^2 + x - 3) = -4x^3 - 2x^2 + 6x$$

$$\begin{array}{rl} \cancel{6x^4} - x^3 + 3x^2 - x + 1 & \Big|\; \underline{2x^2 + x - 3} \\ + \underline{\cancel{-6x^4} - 3x^3 + 9x^2} & \quad 3x^2 - 2x \\ \cancel{-4x^3} + 12x^2 - x + 1 & \\ \underline{\cancel{+4x^3} + 2x^2 - 6x} & \\ 14x^2 - 7x + 1 & \leftarrow \text{novo resto parcial} \end{array}$$

$$\frac{14x^2}{2x^2} = 7;\; 7 \cdot (2x^2 + x - 3) = 14x^2 + 7x - 21$$

$$\begin{array}{rl} \cancel{6x^4} - x^3 + 3x^2 - x + 1 & \Big|\; \underline{2x^2 + x - 3} \\ + \underline{\cancel{-6x^4} - 3x^3 + 9x^2} & \quad 3x^2 - 2x + 7 \\ \cancel{-4x^3} + 12x^2 - x + 1 & \\ + \underline{\cancel{4x^3} + 2x^2 - 6x} & \\ \cancel{14x^2} - 7x + 1 & \\ + \underline{\cancel{-14x^2} - 7x + 21} & \\ \underbrace{-14x + 22}_{\text{O grau do resto é menor que o grau do divisor. A divisão está encerrada.}} & \end{array}$$

Observe que g(x).q(x) + r(x). De fato:

$$(2x^2 + x - 3)(3x^2 - 2x + 7) + (-14x + 22) =$$

$$6x^4 - 4x^3 + 14x^2 + 3x^3 - 2x^2 + 7x - 9x^2 + 6x - 21 - 14x + 22 =$$

$$6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 = f(x)$$

Quando a divisão de dois polinômios (f(x) e g(x)), com o segundo não nulo, é exata, isto é, r(x) = 0, dizemos que f(x) é divisível por g(x), ou ainda, f(x) divide g(x).

- ➔ Se dividirmos um polinômio de grau n e g é um polinômio de grau m, com n maior ou igual a m, na divisão de f por g obtemos um quociente um polinômio de grau n-m.

Exemplos:
Exemplo 1

Para que valores de *a* e *b* o polinômio $-2x^3 + ax + b$ é divisível pelo polinômio $-x^2 + 6x - 1$?

Solução:

Devemos efetuar a divisão e impor que o resto seja um polinômio nulo. Temos:

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{-2x^3} & & + & ax + b & -x^2 + 6x - 1 \\ \cline{5-5}
\cancel{+2x^3} & -12x^2 & + & 2x & 2x + 12 \\ \cline{1-4}
 & \cancel{-12x^2} & + & (a+2)x + b & \\
 & \cancel{+12x^2} & - & 72x + 12 & \\ \cline{1-4}
\text{resto} & \rightarrow (a-70)x + (b+12) & & &
\end{array}$$

O polinômio $(a - 70)x + (b + 12)$ é nulo quando todos os seus coeficientes são iguais a zero, isto é, se:

$$\begin{cases} a - 70 = 0 \Rightarrow a = 70 \\ b + 12 = 0 \Rightarrow b = -12 \end{cases}$$

Exemplo 2

Dividindo-se o polinômio $-x^3 - 4x^2 + 3$ por um polinômio *p*, obtêm-se $-x - 6$ como quociente e $-12x + 3$ como resto. Determinar o polinômio *p*.

Solução:

Do enunciado, podemos escrever:

$$\underbrace{(-x^3 - 4x^2 + 3)}_{f(x)} = p(x) \cdot \underbrace{(-x - 6)}_{q(x)} + \underbrace{(-12x + 3)}_{r(x)}$$

Existem diversas formas de resolução umas delas seria isolar o p(x).

$$(-x^3 - 4x^2 + 3) - (-12x + 3) = p(x).(-x - 6) =$$
$$-x^3 - 4x^2 + 12x = p(x).(-x - 6) =$$
$$\frac{-x^3 - 4x^2 + 12x}{-x - 6} = p(x)$$

Resolvendo obtemos p(x) = $x^2 - 2x$

<u>Divisão por x-a.</u>

Uma divisão importante é quando o divisor é um polinômio do primeiro grau e coeficiente dominante unitário. (x-a ou x+a, sendo "a" pertencente as complexos).

Seja f um polinômio de grau n e n maior ou igual a 1.

$$\begin{array}{l|l} f(x) & x-a \\ \cline{2-2} \downarrow & q(x) \\ r(x) & \end{array}$$

O grau de q(x) n-1
Como o grau do reto deve ser menor que o grau do divisor, temos:
grau de r(x) < 1 ⇒ grau r(x) = 0 (r(x)=k, onde k pertence aos complexos e k ≠ 0) ou r(x)= 0 (r é o polinômio nulo)

<u>Teorema do Resto:</u>

Teorema do resto:

O resto da divisão de um polinômio f(x) por x-a é igual a f(a).

Demonsração: Pela divisão de f(x) por x-a, podemos escrever:
$f(x) = (x - a)q(x) + r(x) \xRightarrow{Pela\ divisão\ por\ x-a} f(x) = (x - a)q(x) + r \Rightarrow f(a) = (a - a)q(x) + r \Rightarrow f(a) = r$

Exemplo 1: Qual o resto da divisão de f(x) $= x^3 + 3x^2 + x + 3$ por $x - i$? E por $x + 3$? O que isso significa?

f(i) = $i^3 + 3i^2 + i + 3 = -i - 3 + i + 3 = 0$
f(-3) = $(-3)^3 + 3(-3)^2 + (-3) + 3 = -27 + 27 - 3 + 3 = 0$
Podemos concluir que i e -3 são raízes do polinômio e também que o polinômio f é divisível por $x - i$ e $x + 3$.

Exemplo 2:

Sejam 5 e 2, respectivamente, os restos da divisão de um polinômio *f* por x − 3 e por x + 1. Qual é o resto da divisão de *f* por (x − 3)(x + 1)?

Solução:

Pelo teorema do resto, temos:

$$f(3) = 5 \quad (1) \qquad e \qquad f(-1) = 2 \quad (2)$$

Quando dividimos *f* por $g = (x - 3) \cdot (x + 1) = x^2 - 2x - 3$, temos grau r ⩽ 1 (pois grau r < grau g e grau g = 2). Assim, escrevemos r(x) = ax + b.

Devemos determinar *a* e *b*. Temos, ∀x ∈ ℂ:

$$f(x) = \underbrace{(x + 1) \cdot (x - 3)}_{g(x)} \cdot q(x) + \underbrace{ax + b}_{r(x)}$$

Calculando o valor numérico desse polinômio em x = 3 e em x = −1, vem:

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = \underbrace{(3 + 1)(3 - 3) \cdot q(3)}_{=0} + a \cdot 3 + b \overset{(1)}{\Rightarrow} 3a + b = 5 \\ f(-1) = \underbrace{(-1 + 1)(-1 - 3) \cdot q(-1)}_{=0} + a(-1) + b \overset{(2)}{\Rightarrow} -a + b = 2 \end{array}\right\}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $a = \frac{3}{4}$ e $b = \frac{11}{4}$. Dessa forma, o resto é $r(x) = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$.

Uma consequência do teorema do resto, chamado teorema de D'Alembert, cujo enunciado é:

Um polinômio f é divisível por x-a se, e somente se, a for raiz de f.

Demonstração:

Há duas implicações a provar:

1ª) *f* é divisível por x − a ⇒ *a* é raiz de *f*.

Se *f* é divisível por x − a, temos r = 0 e, pelo teorema do resto, r = f(a) = 0, do que concluímos que *a* é raiz de *f*.

2ª) *a* é raiz de *f* ⇒ *f* é divisível por x − a.

Como *a* é raiz de *f*, temos que f(a) = 0; pelo teorema do resto, o resto *r* da divisão de *f* por x − a é igual a f(a). Assim, r = f(a) = 0, o que mostra que *f* é divisível por x − a.

Assim vou dar um exercício para que eles pensem sobre a situação, sem um exemplo introdutório, vendo como eles se desenvolvem.

Exercício: Determinar m real, de modo que o polinômio p(x)= $2x^3 - x^2 + mx + m$ seja divisível por $x - 1$.

<u>Dispositivo prático de Briot-Ruffini</u>

Este tópico será omitida a demonstração e assim será construída através de exemplos.
O dispositivo prático de Briot Ruffini é um dispositivo para realizar a divisão de um polinômio f(x) por outro polinômio da forma g(x)=x-a, sendo a um número complexo.

Exemplo: Divida p(x) = $2x^3 - 7x^2 + 2x + 1$ por h(x) = $x - 4$

1º Passo: Encontre a raiz do divisor.

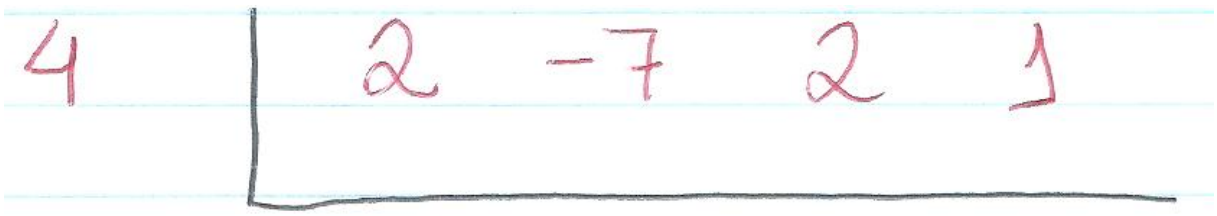
$$h(x) = 0$$
$$x - 4 = 0$$
$$x = 4$$

2º Passo: Identificar os coeficientes, do termo de maior grau ao do menor, considerando os que possuem coeficiente zero. Neste caso: a=2, b=-7, c=2 e d=1.

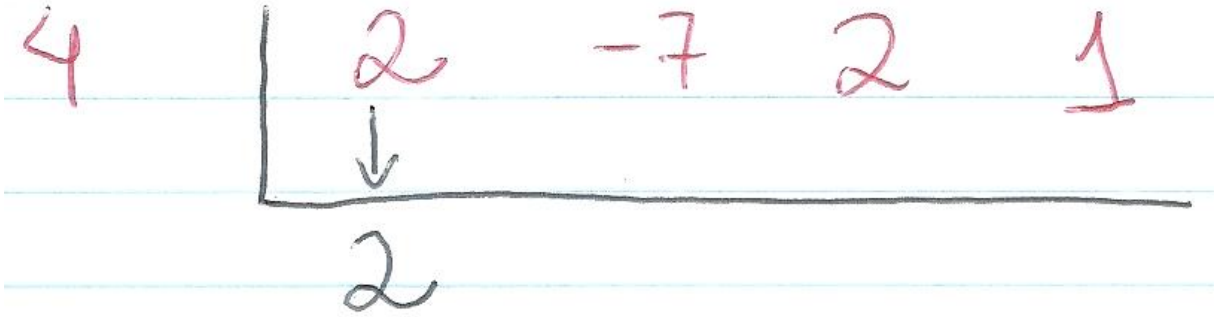
3º Passo: Colocar no seguinte formato

raiz	a	b	c	d

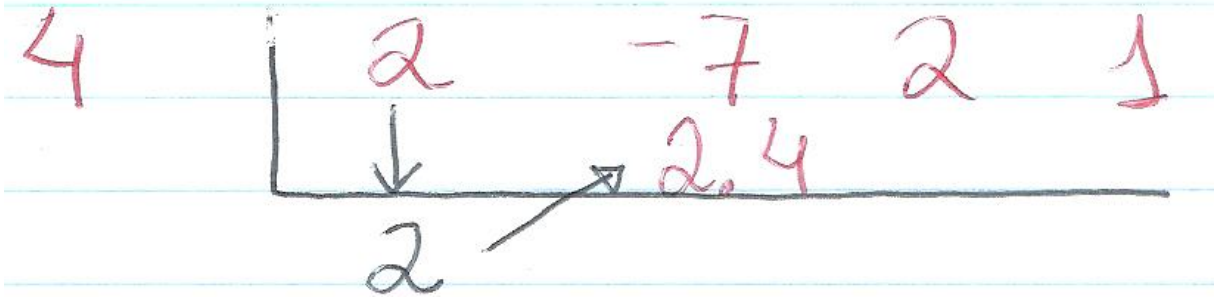
E para este exercício ficaria assim:



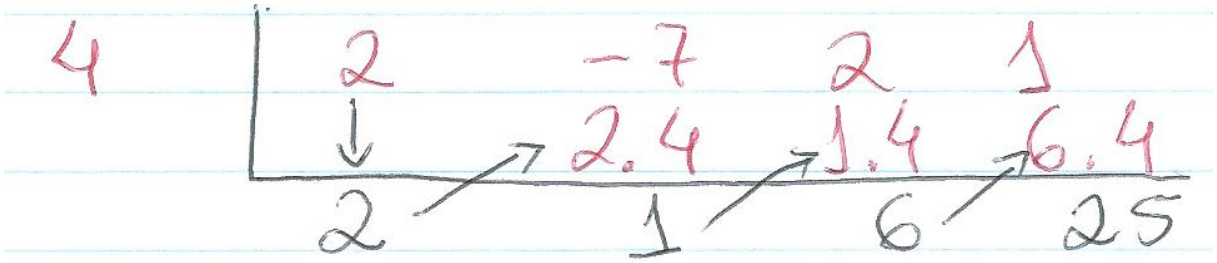
4º Passo: Devemos baixar o primeiro coeficiente abaixo da linha.



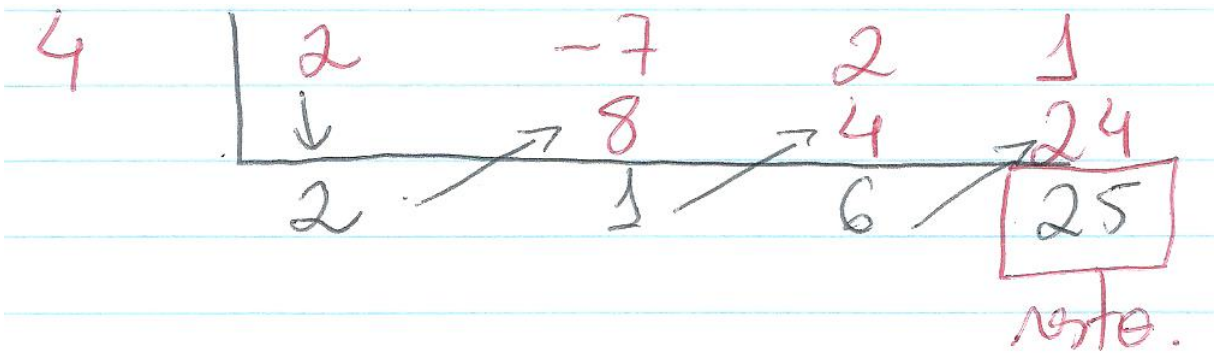
5º Passo: Devemos multiplicar este resultado pela raiz e somar com o próximo coeficiente.



6º Passo: Repetir o processo até chegar no último coeficiente.



7º O último número é o resto e os anteriores são os coeficientes do polinômio resultante da divisão.



Assim o polinômio resultante q(x) = $2x^2 + x + 6$ e o r(x) ou resto é 25.
Logo: p(x) = q(x).d(x) + r(x)

Atividades da Khan

Introdução à divisão longa de polinômios: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials/alg-long-division-of-polynomials/v/polynomial-division

Divisão de polinômios: divisão longa: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials/alg-long-division-of-polynomials/v/dividing-polynomials-1

Introdução à divisão sintética de polinômios: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials/alg-synthetic-division-of-polynomials/v/synthetic-division

Divisão de polinômios: divisão sintética: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials/alg-synthetic-division-of-polynomials/v/synthetic-division-example-2

Atividade de prática: Divida polinômios com restos: divisores binomiais: https://pt.khanacademy.org/math/algebra2/arithmetic-with-polynomials/practice-dividing-polynomials-with-remainders/e/divide-polynomials-by-binomials

Atividade de prática: Divida polinômios com restos https://pt.khanacademy.org/math/algebra2/arithmetic-with-polynomials/practice-dividing-polynomials-with-remainders/e/dividing-polynomials-with-remainders

Os vídeos sobre Teorema do Resto polinomial como atividades complementares:

Atividade de prática sobre o teorema do Resto polinomial: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials/alg-polynomial-remainder-theorem/v/polynomial-remainder-theorem-to-test-factor

Como na *Khan Academy* não possui exercícios de divisão de polinômios somente serão solicitados os exercícios do livro que estão na lista adicional de exercícios.

Assinatura Supervisor de Estágio

Assinatura Coordenador de Estágio

Data: ___/___/____ Data: ___/___/____

As listas de exercícios adicionais são exercícios do livro didático utilizado pela instituição.
Fonte: IEZZI, Gelson. et al. **Matemática:** Ciência e aplicações (Volume 3) 7 ed. São Paulo: Saraiva: 2013.

APÊNDICE H – Diário de bordo 6

INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul | Campus Caxias do Sul

Licenciatura em Matemática
Professora: Kelen Berra de Mello
Disciplina: Estágio Supervisionado no Ensino Fundamental

Diário de Bordo 6

Nome do Estagiário: Eduardo Boff Ribeiro

Conteúdo a ser abordado: Equações Algébricas: Introdução, definição, raiz, Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema da decomposição, Multiplicidade de uma raiz, Relações de Girard, Raízes Complexas, Teorema das raízes racionais. Aula de Exercícios

Tempo estimado (número de aulas): Turma A: 5h00 min (6 aulas) Turma B: 4h10min (5 aulas)

Previsão das datas das aulas: Turma A: 02/10/17 – 09/10/17 /Turma B: 02/10/17, 05/10/17 e 09/10/17

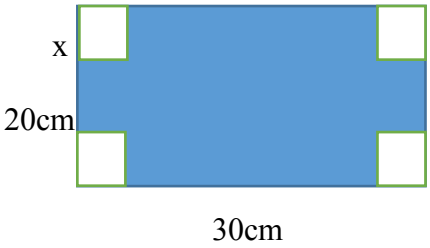
Planejamento das aulas:

Prova dia 16/10/2017 – Individual e sem consulta, com peso de 10 pontos.
Conteúdos – Polinômios e Equações polinomiais.

<u>Introdução às equações polinomiais:</u>

Introdução:

2) Mônica precisa de uma caixa molde, para colocar determinado material, que tenha como volume 1000 cm³. Ela possui uma cartolina com dimensões 20 cm por 30 cm. Com isso, ela gostaria de construir uma caixa, da seguinte forma:



Como Mônica deverá saber quanto é a medida do lado do quadrado a ser recortado?
Para sabermos o volume da caixa é dado por V= comprimento x largura x altura, isso é:

Comprimento: $(30 – x – x) = (30 – 2x)$
Largura: $(20 – x – x) = (20 – 2x)$
Altura: x

Assim o volume da caixa é:
$V=(30 – 2x).(20 – 2x).x = 4x^3-100x^2+600x$.
Como queremos uma caixa com 1000 cm³ de volume.

$4x^3-100x^2+600x=1000$.

O valor de x procurado é uma solução de:

$4x^3-100x^2+600x-1000=0$
Essa é uma equação algébrica ou polinomial, objeto de estudo deste capítulo.

Definição de equação algébrica ou polinomial:

Uma equação algébrica ou polinomial é toda equação redutível à forma $p(x)=0$, em que:
$p(x)= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x+a_0=0$, com $a_n\neq0$, é um polinômio de grau n, sendo n maior ou igual a 1, com coeficientes em C, e cuja a incógnita x pode assumir um valor qualquer em C.

Exemplos de equações polinomiais:

$2x^3-ix^2+9x+i = 0$
$ix^7+x^3+3x+7 = 0$

Raiz

Da mesma forma que visto em polinômios, um número r é raiz da equação, se substituirmos r na equação e ao efetuarmos os cálculos obtemos 0.

Seja a equação: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x+a_0=0$, r é raiz se:
$a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + ... + a_2r^2 + a_1r+a_0=0$

Exemplo: Confirme que i é uma raiz de $x^2+1=0$.
Vamos verificar se i é raiz:
$x^2+1 = (i)^2+1 = -1 + 1 = 0$.
Portanto i é uma raiz da equação $x^2+1=0$.

Conjunto solução de uma equação polinomial

O conjunto solução de uma equação polinomial é o conjunto de todas as raízes dessa equação, considerando o conjunto universo. (Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, Reais, ou Complexos).

- Já aprendemos a encontrar a raízes de polinômios de 1º e 2º graus.
- As fórmulas resolutivas de equações de 3º e 4º grau existem, mas não serão o foco desse estudo.
- As equações de 5º grau ou mais não possuem fórmulas resolutivas.

Teorema Fundamental da Álgebra

O teorema seguinte, de Carl Gauss, constitui um elemento central para o estudo de equações algébricas.

Todo polinômio de grau n, com n maior ou igual a 1, admite ao menos uma raiz complexa.

Teorema da decomposição:

Seja p(x) um polinômio de grau n, com n maior ou igual a 1, dado por:

$p(x)= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x+a_0$, com (com $a_n \neq 0$)
Então p(x) pode ser decomposto em n fatores de 1° grau sob a forma:
$p(x)= a_n (x-r_1). (x-r_2). (x-r_3)... (x-r_n)$
em que $r_1, r_2, r_3,..., r_n$ são as raízes de p(x) e a_n é o coeficiente dominante de p(x)

Observação 1: Dizemos que cada um dos polinômios do 1º *$(x-r_1), (x-r_2), (x-r_3),...(x-r_n)$* é um fator de p(x)
Observação 2: A decomposição de p(x) em termos de sua raízes é única, com exceção da multiplicidade das suas raízes.
Observação 3: p(x) é divisível por qualquer um desses fatores, individualmente e também por qualquer produto desses fatores.

Exemplo: Utilizando o teorema da decomposição, qual a forma fatorada da equação $x^2 + 2x + 2 = 0$?
a=1, b=2, c=2
Formula resolutiva de equação de segundo grau.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo na formula resolutiva de equação de segundo grau.
$\Delta = (2)^2 - 4(1)(2) = -4$
Levantar o questionamento que no conjunto dos números reais não haveria solução, pois daria a raiz quadrada de um número negativo, mas agora em âmbito dos números complexos, vamos continuar...

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2.(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$$x' = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$
$$x'' = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

S= {– 1 + i, – 1 – i}
Agora identificamos quem é o termo de maior grau: $a_n = 1$

Forma fatorada:
$a_n (x-r_1). (x-r_2)=0$
$1(x-(-1+i)). (x-(-1-i))=0$
Ou
$(x+1-i)(x+1+i)=0$

Podemos confirmar, realizando o produto:

$(x+1-i)(x+1+i)=0$
$x^2 + x + xi + x + 1 + i - ix - i - i^2 = x^2 + x + x + xi - xi + i - i + 1 - (-1) = x^2 + 2x + 2 = 0$

Consequência do teorema da decomposição.

Toda equação polinomial de grau n, com n maior ou igual a 1, admite exatamente n raízes complexas.

Exemplos:
O polinômio de 1° grau dado por p(x)= 4x – 8 admite 2 como raiz; podemos escrever p(x)= 4 (x-2)
O polinômio de 2º grau dado por p(x)= x^2-x-2 admite como raízes -1 e 2. Podemos decompor p(x) fazendo: 1 (x+1)(x-2)

Exemplo: Quais são as raízes do polinômio p(x)=(x-1)(x+1)(x+5)(x-1+2i)(x-1-2i).
Podemos colocar na forma de *(x-r)*..
p(x)= (x-(1))(x-(-1))(x-(-5))(x-(1-2i))(x-(1+2i))

Não há necessidade realizar a multiplicação, pois a decomposição é única. As raízes deste polinômio são: 1, -1, -5, 1-2i e 1+2i

Exemplo: Resolva a equação x^3-8x^2+29-52=0, sabendo que uma das raízes é 4.

Seja p(x) o polinômio dado e 4, r_1 e r_2. Usando o Teorema da decomposição, podemos escrever:
$p(x)= 1(x-4)(x-r_1)(x-r_2)$

Chamando q(x) = $(x-r_1)(x-r_2)$, temos:

p(x) = (x-4)q(x) ⇒ $\frac{p(x)}{(x-4)} = q(x)$

Este exemplo será utilizado Briot-Ruffini para a redução do grau e posteriormente, a fórmula resolutiva de equação de segundo grau.

Encontrando como conjunto solução da equação: S={4, 2-3i, 2+3i)

Pergunta: Duas equações distintas podem ter as mesmas raízes?

Sim! Observe os exemplos na forma fatorada:

p(x) = $a_n (x-r_1)(x-r_2)$

Encontre duas equações polinomiais que possuam as raízes 1 e 2

p(x) = $a_n (x-r_1)(x-r_2)$
p(x) = $a_n (x-1)(x-2)$
p(x) = $a_n (x^2-3x+2)$

Podemos escolher dois valores para a_n ,como por exemplo:
Para $a_n=-1$
Temos a equação:
p(x) = $a_n (x^2-3x+2)$
q(x) = $-1(x^2-3x+2)= -x^2+3x-2$

ou para $a_n=-5$
Temos a equação:
$p(x) = a_n (x^2-3x+2)$
$t(x) = -5(x^2-3x+2)= -5x^2+15x-10$

Duas possíveis equações, são:
$-x^2+3x-2 = 0$ ou $-5x^2+15x-10=0$

Exemplo: Duas das raízes da equação $2x^4+ 5x^3 -35x^2 -80x+48=0$ são -3 e -4. Encontre as outras
Assim o polinômio pode ser escrito por: $p(x) = 2. (x + 3) (x + 4) (x-r_1)(x-r_2)$
Existem duas formas de resolução deste exercício:
A que será mostrada para os estudantes será através da redução de grau duas vezes por Briot-Ruffini e a outra é utilizando a divisão longa, que será dada como exercício.
Pelo Briot-Ruffini, ao dividirmos sucessivamente por $(x + 3) (x + 4)$, obteremos:
$2x^2-9x+4$ e igualando a 0 a equação, pela fórmula resolutiva de 2º grau obteremos as outras duas raízes que são 4 e 1/2.

Pela divisão longa
$p(x) = 2. (x + 3) (x + 4) (x-r_1)(x-r_2) = (x^2+7x+12)(x-r_1)(x-r_2)=2(x^2+7x+12)(x-r_1)(x-r_2)$
Sendo assim, e chamando $q(x) = 2(x-r_1)(x-r_2)$
Realizando a divisão longa de $2x^4+ 5x^3 -35x^2 -80x+48$ por $x^2+7x+12$, obteremos q(x), para q(x) =0 obteremos as outras duas raízes.

Exemplo por fatoração:

Alguns casos não há necessidade de diminuir o grau por divisão longa ou pelo dispositivo prático, pois podem ser fatoradas.

Encontre as raízes de $x^3-2x^2+2x=0$

Colocando o fator x em evidência, temos:

$x(x^2-2x+2)=0$, desta forma temos duas possibilidades:
$x=0$, ou seja, 0 é uma raiz da equação.
ou,
$x^2-2x+2=0$, resolvendo pela fórmula resolutiva de equação de segundo grau obteremos as raízes 1+i e 1-i.

Logo as raízes são 0, 1+i e 1-i

<u>Multiplicidade de uma raíz</u>

Ao resolver a equação $x^2-12x+36=0$, encontramos duas raízes iguais a 6. Assim esta equação pode ser fatorada da seguinte forma: $(x-6)(x-6)=0$ e portanto, $(x-6)^2$. Assim dizemos que x=6 é uma raiz dupla ou raiz de multiplicidade 2 da equação.

Exemplo: Seja um polinômio p na forma fatorada: $(x-4)^3.(x+3)^2x$. Para resolvermos esse polinômio então, p(x)=0, analise as multiplicidades.

$(x-4)^3.(x+3)^2x = 0$

Temos que:

$x-4 = 0 \Rightarrow x=4$ (três vezes): 4 é raiz tripla ou de multiplicidade 3.

$x+3 = 0 \Rightarrow x=-3$ (duas vezes): -3 é raiz dupla ou de multiplicidade 2.
$x=0$ (uma vez): 0 é raiz simples ou de multiplicidade 1

Dessa forma o polinômio é de grau 6 e tem como raízes 4,4,4,-3,-3,0 em que seu conjunto solução: S={-3,0,4}.

Definição:
O número complexo r é uma raiz de multiplicidade de m, sendo m inteiro e maior ou igual a 1, da equação p(x)=0 se a forma fatorada de p(x) é:
$p(x) = \underbrace{(x-r).(x-r). \ldots .(x-r)}_{m \text{ fatores}} . q(x)$
isto é:
$p(x) = (x-r)^m.q(x)$, com q(x) não nulo.

Exemplo: Resolver a equação $x^4+4x^3+ 2x^2+ 12x+ 45=0$, sabendo que -3 é raiz dupla dessa equação.

Chamando de p(x) o polinômio dado e r_1 e r_2 as raízes desconhecidas e colocando ele na forma fatorada temos:

$p(x)= (x+3)(x+3).(x-r_1)(x-r_2)$.

Da mesma forma que um exemplo já dado, este poderá ser resolvido por uma redução de grau através do dispositivo prático Briot-Ruffini ou Divisão longa. Dessa forma, os estudantes escolherão qual método este exemplo será resolvido.

Ao final, as raízes encontradas são $r_1 =1-2i$ e $r_2=1+2i$.

<u>Relações de Girard (Relações entre coeficientes e raízes)</u>

As relações de Girard, são relações entre as raízes de uma equação e os coeficientes.

Para equações de segundo grau:

Sejam r_1 e r_2 raízes da equação $ax^2+bx+c = a(x- r_1)(x-r_2)$
Dividindo ambos os lados por a, sendo a não nulo, e realizando a distributiva temos:

$x^2+(b/a)x+(c/a) = x^2- r_1x - r_2x+ r_1.r_2= x^2- (r_1+r2)x+ r_1.r_2$

Pela igualdade de polinômios temos que:
$r_1+r_2= - b/a$
$r_1.r_2 = c/a$

Exemplo: Encontre a soma e o produto das raízes da equação $x^2-5x+4=0$
Soma: $-b/a = +5/1 = 5 = r_1+r_2$

Produto: c/a = 4/1 = 4 = $r_1.r_2$

Para equações de grau n.

Seja a equação $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$, e $r_1, r_2, \ldots, r_n$ suas raízes. Por meio de raciocínio análogo aos anteriores, vem:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \ldots + r_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \text{ (soma das } n \text{ raízes)} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + \ldots + r_n \cdot r_{n-1} = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \text{ (soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas)} \\ r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_4 + \ldots + r_{n-2} \cdot r_{n-1} \cdot r_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \text{ (soma dos produtos das raízes tomadas três a três)} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n} \text{ (produto das } n \text{ raízes)} \end{cases}$$

<u>Raízes Complexas:</u>

Introdução: Resolvendo a equação $x^2+2x+5=0$ obtemos como raízes 1+2i e 1-2i. Perceba que uma raiz é o conjugado da outra.

Teorema: Se um número complexo z=a+bi, com b não nulo, é raiz de uma equação com coeficientes reais, então seu conjugado $\bar{z}$ = a-bi, também é raiz dessa equação.

Observações:

- Se uma raiz complexa tem multiplicidade m, seu conjugado também terá multiplicidade m.
- A partir deste teorema, em uma equação de coeficientes reais, as raízes complexas sempre ocorrem aos pares.

Exemplo: Podemos ter uma equação polinomial, com coeficientes reais, de grau 5 com somente 3 raízes complexas não reais?

Não, pois as raízes complexas ocorrem aos pares.

Exemplo: A equação $x^2+mx+n=0$, com m e n coeficientes reais, admite 5-2i como raiz, qual

seria a outra raiz? Quais sãos os valores de m e n?

Pela equação ter coeficientes reais, pelo Teorema, temos que o conjugado também é raiz,

então 5+2i também raiz.

Assim, podemos utilizar as relações de Girard.

Soma: 5 + 2i + 5 – 2i = 10, como –m/1 = 10, logo m=-10

Produto: $(5+2i)(5-2i)=25-4i^2 = 29$, como $n/1=29$, logo $n=29$.

Exemplo: Quantas raízes reais tem o polinômio $p(x)=x^4-8x^3+15x^2+80x+250$, sabendo que uma das raízes é 4-3i.

Chamando de a e b as raízes, colocando na forma fatorada e observando que 4+3i também é uma raiz temos que:

$(x-(4-3i))(x-(4+3i))q(x)= x^4-8x^3+15x^2+80x+250$

$(x-(4-3i))(x-(4+3i)) = x^2-8x+25$

Então devemos realizar a divisão longa de $x^4-8x^3+15x^2+80x+250$ por $x^2-8x+25$.

Realizando divisão vamos obter que $q(x)=x^2-10$, o qual possui raízes $x= \pm\sqrt{10}$. Logo temos que esta equação polinomial tem exatamente 2 raízes reais

<u>Teorema das raízes racionais:</u>

Quando temos coeficientes inteiros em uma equação polinomial, podemos utilizar este teorema para encontrarmos possíveis raízes.

Seja a equação polinomial de coeficientes inteiros, $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x+a_0=0$, com $a_n\neq0$. *Se o número racional p/q, p inteiro e q inteiro e não nulo, com p e q primos entre si, é raiz dessa equação, então p é divisor de* a_0 *e 1 e q é divisor de* a_n.

Observações importantes sobre o Teorema:

- Este teorema não garante a existência de raízes racionais.
- Caso existam raízes racionais, o teorema fornece todas as possibilidades para tais raízes.

Encontre os candidatos a raízes utilizando o Teorema e assim, encontre as raízes da equação $3x^3-7x^2+8x-2=0$

Para o Teorema os coeficientes importantes são: $a_3=3$ e $a_0=-2$
Se existirem raízes racionais, elas serão da forma p/q onde p é divisor de a_0 (+1,-1,+2,-2), e q divisor de a_3 (+1,-1,+3,-3).
Então as possibilidades de raízes são:
1, -1, +1/3, -1/3,+2,-2,+2/3 e -2/3.

Agora quais são as raízes?
Para ser raiz da equação quando substituirmos, o resultado deve ser zero. Chamando a equação de p(x), temos:

$p(1) = 3(1)^3-7(1)^2+8(1)-2 = 3-7+8-2=2$, logo 1 não é uma raiz
$p(-1) = 3(-1)^3-7(-1)^2+8(-1)-2 = -3-7-8-2 = -20$, logo -1 também não é uma raiz
$p(1/3) = 3(1/3)^3-7(1/3)^2+8(1/3)-2 = 3/27 – 7/9 + 8/3 – 2 = 3/27 – 21/27 + 72/27 – 54/27 = 0$,

logo 1/3 é uma raiz.

Poderíamos testar para vermos se existe alguma outra raiz, mas também podemos aplicar o dispositivo prático, para redução de grau encontrar as outras duas raízes.

Utilizando Briot-Ruffini encontraremos a equação $3x^2-6x+6=0$ e que possui como raízes, 1-i e 1+i.
Logo as raízes da equação $3x^3-7x^2+8x-2=0$ são 1/3, 1-i e 1+i

Exemplo 2: Como um trabalho, será solicitado que eles resolvam a atividade introdutória sobre equações polinomiais, utilizando o teorema das raízes racionais.

Atividades da *Khan Academy* de estudo:

A parte das equações polinomiais, não há muito material na *Khan Academy*. Os tópicos para os estudantes serão:

Os vídeos de Teorema Fundamental da álgebra: https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials/alg-fundamental-theorem-of-algebra/v/fundamental-theorem-of-algebra-intro.

Atividades Práticas:

Equações de segundo grau com números complexos - https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-polynomials/alg-quadratic-equations-with-complex-numbers/e/quadratic-formula-with-complex-solutions

Atividades complementares da lista de exercícios do livro.

_____	_____
Assinatura Supervisor de Estágio	Assinatura Coordenador de Estágio
Data: ___/___/____	Data: ___/___/____

As listas de exercícios adicionais são exercícios do livro didático utilizado pela instituição.

Fonte: IEZZI, Gelson. et al. **Matemática:** Ciência e aplicações (Volume 3) 7 ed. São Paulo: Saraiva: 2013.

APÊNDICE I – Prova sobre polinômios e equações polinomiais: Turma A

INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul | Campus Caxias do Sul

Disciplina: Matemática III

Professor: Eduardo Boff Ribeiro

Nota:	Peso: 10 pontos

Estudante:_____

PROVA 3 – POLINÔMIOS e Equações polinomiais – 3º Trimestre de 2017
Questões não justificadas não serão consideradas.

1 Seja $p(x) = -3x^3 - 3x^7 + 1 + i$. Determine:
   i. Coeficiente dominante:
   ii. Coeficiente independente:
   iii. O grau do polinômio:
   iv. $p(1)$:
   v. O coeficiente do termo de grau 3:
   vi. É verdade que $p(x) = 0$ é uma equação polinomial?

2 Simplifique o polinômio $p(x) = (-3x^3 - 3x^7 + 1 + i) - (-3x^7 - 2x^3 + i) + (x + 1)$.

3 Considere uma caixa com uma determinada altura; sua largura é 3cm maior que sua altura; e o comprimento 2cm maior que sua altura. Determine:
   i. O polinômio que expressa o volume da caixa.
   ii. O volume quando a altura é de 3cm?

4 Para que os polinômios $p(x) = -mx^2 + (a + b)x + 2b$ e $q(x) = 2x^2 + 7x + 10$ sejam iguais, determine o valor de a, b e de m.

5 Qual o resto da divisão de $p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 7$ por $q(x) = x - 2$?

6 Determine uma equação polinomial do 6º grau em sua forma fatorada que contemple todos os itens:
   i. -2 seja uma raiz dupla
   ii. 4 seja uma raiz tripla
   iii. 7 seja uma raiz de multiplicidade 1
   iv. 5 seja o coeficiente dominante

7 Seja a equação $x^3 + 2x^2 + mx - 6 = 0$. Sabendo que m é real, e -3 é raiz da equação:
   i. Confirme que para estas condições m vale -5.
   ii. Quantas raízes possui esta equação polinomial?
   iii. Quais são as outras raízes?

8 Determine uma equação de segundo grau com coeficientes reais, em que uma das raízes seja $1 + 2i$ e que possua como coeficiente dominante igual a 1.

9 Quais são as três raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$?

10 Qual o resto e o quociente da divisão de $p(x)$ por $q(x)$, sabendo que:
$p(x) = x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 2x^2 + x + 1$ e $q(x) = x^2 + x + 1$

APÊNDICE J – Prova sobre polinômios e equações polinomiais: Turma B

INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul | Campus Caxias do Sul

Disciplina: Matemática III

Professor: Eduardo Boff Ribeiro

Nota:	Peso: 10 pontos

Estudante:_____

PROVA 3 – Polinômios e EQUAÇÕES polinomiais – 3º Trimestre de 2017

Questões não justificadas não serão consideradas.

1 Determine um polinômio que contemple todos os seguintes itens:

a. Possua coeficiente independente igual a $-1+i$;

b. Possua coeficiente dominante $2i$;

c. O grau do polinômio seja 7;

d. O coeficiente do termo de grau 4 seja -2;

2 Sabendo que:

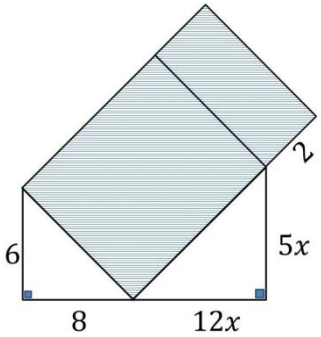
$A = -3x^3 - 1 + i$ $\quad B = -3x^7 - 1 - 2i$ $\quad C = 4x^7 - 3x^3 + 2 + 3i$

Determine $A - B + C$

3 Seja um terreno na forma ao lado, determine:

a) O polinômio que expressa área hachurada da figura ao lado;

b) A área do terreno para $x = 2$.



4 Encontre a, b, c e d. Sabendo que:

$3x^3 + 18x^2 + 5x - 1 = 3ax^3 + 6bx^2 + (c+d)x + d$

5 Qual o resto da divisão de $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 2$ por $q(x) = x - 2$

6 A partir da equação polinomial abaixo em sua forma fatorada, responda:

$(x+1)(x-2i)^3(x+2i)^3(x-i+2)(x-i-2)(x-5)^2 = 0$

a) Qual o grau da equação polinomial?

b) Quais são raízes e suas devidas multiplicidades dessa equação polinomial?

7 Seja a equação $x^3 + 2x^2 + mx - 6 = 0$. Sabendo que m é real, e 2 é raiz da equação:

a) Confirme que para estas condições m vale -5.

b) Quantas raízes possui esta equação polinomial?

c) Quais são as outras raízes?

8 Determine uma equação de segundo grau com coeficientes reais, em que uma das raízes seja $2+i$ e que possua como coeficiente dominante igual a 1.

9 Quais são as três raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$?

10 Qual o resto e o quociente da divisão de $p(x)$ por $q(x)$, sabendo que:

$p(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 8x^2 - x + 1$ e $q(x) = x^2 + x + 1$.

APÊNDICE K – Entrevista aos estudantes por meio de formulário eletrônico de avaliação

Apresentação: Prezado estudante!

Esse formulário foi construído para você se autoavaliar e avaliar a metodologia adotada na disciplina de Matemática III no período de 31/08/2017 a 16/10/2017, fruto do Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática do licenciando Eduardo Boff Ribeiro, sob orientação da professora Dra. Greice da Silva Lorenzzetti Andreis, intitulado "Números complexos, polinômios e equações polinomiais: uma exploração metodológica de ensino híbrido com a plataforma educacional *Khan Academy*". O trabalho em questão tem como finalidade criar e executar uma prática de ensino sobre números complexos, polinômios e equações polinomiais por meio do uso da plataforma educacional *Khan Academy* e, adjacente a este processo, refletir sobre a aprendizagem dos estudantes participantes.

Dessa forma, solicitamos que você responda este formulário de forma sincera, clara e detalhada, para que possamos refletir sobre as atividades desenvolvidas, contribuindo para o ensino de Matemática. Lembramos que em todo o material divulgado não haverá a identificação pessoal dos participantes. Sua identidade será preservada.

Agradecemos sua participação durante a realização da pesquisa, bem como ao responder este questionário.

Atenciosamente, professores Eduardo e Greice.

Formulário:

1. Indique sua turma:
    a. 3º A
    b. 3º B
2. Indique seu curso:
    a. Técnico em Fabricação Mecânica Integrado ao Ensino Médio
    b. Técnico em Plásticos Integrado ao Ensino Médio
    c. Técnico em Química Integrado ao Ensino Médio
3. Você realizou as atividades indicadas na plataforma educacional *Khan Academy*?
    a. Sim, em sua totalidade.
    b. De forma parcial.
    c. Não.
4. Em caso negativo, por que não fez? Em caso positivo, total ou parcial, que impacto teve em seu rendimento escolar? Explique.
5. Você realizou as atividades de sala de aula indicadas durante as mesmas?
    a. Sim, em sua totalidade.

   b. De forma parcial.
   c. Não.

6. Em caso negativo, por que não fez? Em caso positivo, que impacto teve em seu rendimento escolar? Explique.
7. Qual foi o impacto em sua aprendizagem ao utilizar a plataforma educacional *Khan Academy* no estudo de números complexos? Dê exemplos que fundamentam este impacto.
8. Qual foi o impacto em sua aprendizagem ao utilizar a plataforma educacional *Khan Academy* no estudo de polinômios? Dê exemplos que fundamentam este impacto.
9. Qual foi o impacto em sua aprendizagem ao utilizar a plataforma educacional *Khan Academy* no estudo de equações polinomiais? Dê exemplos que fundamentam este impacto.
10. Cite aspectos positivos referentes às metodologias utilizadas para o ensino de números complexos, polinômios e equações polinomiais.
11. Dentre os aspectos positivos mencionados anteriormente, indique o aspecto "mais positivo" na sua compreensão. Explique o porquê desta escolha.
12. Cite aspectos negativos referentes às metodologias utilizadas para o ensino de números complexos, polinômios e equações polinomiais.
13. Dentre os aspectos negativos mencionados anteriormente, indique o aspecto "mais negativo" na sua compreensão. Explique o porquê desta escolha.
14. Você pretende continuar utilizando a plataforma educacional *Khan Academy* em seus estudos?
    a. Sim
    b. Não
15. Por quê?
16. Você indicaria a outros estudantes a plataforma educacional *Khan Academy*?
    a. Sim
    b. Não
17. Por quê?
18. Você indicaria a professores a plataforma educacional *Khan Academy* para uso em sala de aula?
    a. Sim
    b. Não
19. Por quê?
20. Caso os questionamentos anteriores não tenham sido suficientes para você descrever suas experiências com a *Khan Academy* e a forma de trabalho adotada em sala de aula, deixe aqui sua contribuição.

APÊNDICE L – Termo de Consentimento Informado – Menor de 18 anos

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

TCC – Trabalho de Conclusão de Curso

INSTITUTO FEDERAL
Rio Grande do Sul
Campus
Caxias do Sul

Eu, _____, R.G. _____ declaro que, por meio deste termo, concordo em autorizar o estudante _____ a participar da pesquisa *Números Complexos, Polinômios e Equações Polinomiais: Uma exploração metodológica de ensino híbrido com a plataforma educacional Khan Academy,* desenvolvida pelo pesquisador Eduardo Boff Ribeiro.

Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela professora Dra. Greice da Silva Lorenzzetti Andreis, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail greice.andreis@caxias.ifrs.edu.br.

Tenho ciência que a participação do estudante não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que possui como objetivo geral criar e executar uma prática de ensino sobre números complexos, polinômios e equações polinomiais, por meio do uso da plataforma educacional *Khan Academy* e, adjacente a este processo, refletir sobre a aprendizagem destes estudantes.

Fui também esclarecido(a) de que o uso das informações oferecidas pelo estudante será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), sem identificação de seu nome. A colaboração se fará por meio de entrevista/questionário escrito ou online, etc. No caso de fotos, obtidas durante a participação do estudante, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. A colaboração do estudante se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que caso eu tenha alguma dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável pelo e-mail eduardo.ribeiro@caxias.ifrs.edu.br. Fui informado(a) de que o estudante pode se retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

_____, _____ de _____ de _____

Assinatura do responsável:

Assinatura do pesquisador:

Assinatura da orientadora da pesquisa:

APÊNDICE M – Termo de Consentimento Informado – Maior de 18 anos

TERMO DE CONSENTIMENTO INFORMADO

TCC – Trabalho de Conclusão de Curso

INSTITUTO FEDERAL Rio Grande do Sul | Campus Caxias do Sul

Eu, _____, R.G. _____ declaro que, por meio deste termo, concordo em participar da pesquisa *Números Complexos, Polinômios e Equações Polinomiais: Uma exploração metodológica de ensino híbrido com a plataforma educacional Khan Academy,* desenvolvida pelo pesquisador Eduardo Boff Ribeiro.

Fui informado(a), ainda, de que a pesquisa é coordenada/orientada pela professora Dra. Greice da Silva Lorenzzetti Andreis, a quem poderei contatar a qualquer momento que julgar necessário, através do e-mail greice.andreis@caxias.ifrs.edu.br.

Tenho ciência que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro, sendo a única finalidade desta participação a contribuição para o sucesso da pesquisa. Fui informado(a) dos objetivos estritamente acadêmicos do estudo, que possui como objetivo geral criar e executar uma prática de ensino sobre números complexos, polinômios e equações polinomiais, por meio do uso da plataforma educacional *Khan Academy* e, adjacente a este processo, refletir sobre a aprendizagem destes estudantes.

Fui também esclarecido(a) de que o uso das informações oferecidas por mim será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários, etc.), sem identificação de meu nome. A colaboração se fará por meio de entrevista/questionário escrito ou online, etc. No caso de fotos, obtidas durante a minha participação, autorizo que sejam utilizadas em atividades acadêmicas, tais como artigos científicos, palestras, seminários etc, sem identificação. Minha colaboração se iniciará apenas a partir da entrega desse documento por mim assinado.

Estou ciente de que caso eu tenha alguma dúvida, ou me sinta prejudicado(a), poderei contatar o pesquisador responsável pelo e-mail eduardo.ribeiro@caxias.ifrs.edu.br. Fui informado(a) de que posso me retirar dessa pesquisa a qualquer momento, sem sofrer quaisquer sanções ou constrangimentos.

_____, _____ de _____ de _____

Assinatura do responsável:

Assinatura do pesquisador:

Assinatura da orientadora da pesquisa: