Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul

Campus Caxias do Sul

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E FUNÇÕES ABSOLUTAMENTE CONTÍNUAS

Trabalho de Conclusão de Curso
Licenciatura em Matemática

Gustavo Alcides Lorensi

Caxias do Sul
2016

GUSTAVO ALCIDES LORENSI

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E FUNÇÕES ABSOLUTAMENTE CONTÍNUAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – Campus Caxias do Sul.

Área de concentração: Matemática.

Orientadores:

Dr. Nicolau Matiel Lunardi Diehl – IFRS.
Me. Sabrina Arsego Miotto – IFRS.

Caxias do Sul,
Novembro de 2016.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Caxias do Sul.

51
L868t

Lorensi, Gustavo Alcides.

O teorema fundamental do cálculo e funções absolutamente contínuas / Gustavo Alcides Lorensi; orientadores, Nicolau Matiel Lunardi Diehl, Sabrina Arsego Miotto. - Caxias do Sul, RS, 2016.

40 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, *Campus* Caxias do Sul. Graduação em Matemática.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Teoria da medida. 3. Integral de Lebesgue. 4. Funções absolutamente contínuas. 5. Teorema fundamental do cálculo. I. Diehl, Nicolau Matiel Lunardi. II. Miotto, Sabrina Arsego. III. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul. Graduação em Matemática. IV. Título.

CDU 51

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Jaçanã Eggres Pando CRB 10/1936.

GUSTAVO ALCIDES LORENSI

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO E FUNÇÕES ABSOLUTAMENTE CONTÍNUAS

A banca examinadora, abaixo assinada, aprova o Trabalho de Conclusão de Curso: O Teorema Fundamental do Cálculo e Funções Absolutamente Contínuas elaborado por Gustavo Alcides Lorensi como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – Campus Caxias do Sul.

Prof. Dr. Diego Marcon Farias - UFRGS.

Prof. Esp. Nícolas Moro Müller - IFRS Campus Caxias do Sul

Profa. Dra. Patrícia Lisandra Guidolin - IFRS Campus Farroupilha.

Caxias do Sul, 22 de Novembro de 2016.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por toda a paciência durante a realização deste trabalho e por todo o incentivo e apoio.

Ao professor orientador Nicolau Matiel Lunardi Diehl, por toda sua disponibilidade e dedicação para a realização deste trabalho. Inúmeras dificuldades que tive durante a construção deste trabalho não poderiam ser superadas sem o seu auxílio e apoio. Por toda sua dedicação e preocupação com os alunos. Além de todas as excelentes aulas, em que aprendi muito além da matéria, aprendi a me formar como professor.

À minha colega e amiga Taís Guinalli, por sempre me apoiar, aconselhar e por me apresentar o Instituto.

A todos os professores do IFRS que tive o prazer de conhecer, por contribuírem para minha formação e pela qualidade de ensino.

A todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

A todos a minha eterna gratidão.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo estabelecer condições necessárias e suficientes para que uma função satisfaça o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC). O método utilizado para a realização do trabalho foi a pesquisa bibliográfica, possibilitando o estudo de toda a teoria envolvida no problema. O trabalho inclui a apresentação de algumas noções preliminares de Análise na Reta e da Integral de Riemann a fim de embasar o estudo da Teoria da Medida e assim decorrer no propósito principal do estudo. A Teoria da Medida é uma importante área da Análise Matemática e tem como uma de suas principais ferramentas a Integral de Lebesgue, que se apresenta como uma generalização da Integral de Riemann. Tal teoria tem importantes aplicações em probabilidade, espaços L^p, Equações Diferenciais Ordinárias e aplicações na mecânica quântica, principalmente no estudo de espaços de Hilbert. Neste trabalho veremos que uma função é absolutamente contínua se, e somente se, vale o TFC. Apresentamos ainda, a função de Cantor como exemplo de uma função contínua, derivável em quase todo ponto, mas que não é absolutamente contínua.

Palavras-chave: Teoria da Medida. Integral de Lebesgue. Funções Absolutamente Contínuas. Teorema Fundamental do Cálculo.

Abstract

The present work aims to establish necessary and sufficient conditions for a function to satisfies the Fundamental Theorem of Calculus (FTC). The method used to the realization of this study was the bibliographical research, allowing the study of all the background theory. The work includes a presentation of some preliminary notions of real analysis and Riemann Integral to base the study of the measure theory and then proceed to the work study's principal purpose. Measure Theory is an important area of Mathematical Analysis and has as one of its main tools the Lebesgue Integral, which is a generalization of the Riemann Integral. This theory has important applications in probability, L^p spaces, Ordinary Differential Equations, and quantum mechanics, especially in the study of Hilbert spaces. In this work we will see that a function is absolutely continuous if, and only if, the FTC holds. We also present the Cantor function as an example of a continuous function, differentiable at almost every point, but not absolutely continuous.

Keywords: Measure Theory. Lebesgue Integral. Absolutely Continuous Functions. Fundamental Theorem of Calculus.

Sumário

1 Introdução **8**

2 Metodologia **10**

3 Embasamento Histórico **11**

4 Teoria preliminar **14**

4.1 Topologia na Reta 14
4.2 Limite de Funções 17
4.3 Funções Contínuas 17
4.4 Derivadas 19
4.5 Integral de Riemann 21

5 Teoria da Medida **24**

5.1 Álgebras 24
5.2 Medidas 25
5.3 Conjuntos Mensuráveis 26
5.4 Funções Mensuráveis 26
5.5 Integral de Lebesgue 29
5.6 Funções Absolutamente Contínuas 33
5.7 Função de Cantor 35

6 Conclusão **38**

1 Introdução

Objetivamos com este trabalho responder o seguinte problema norteador: é possível estabelecer condições necessárias e suficientes para que uma função satisfaça o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)? Ou seja, é possível determinar qual a maior classe de funções que satisfazem o TFC?

Com o intuito de responder à questão do parágrafo anterior estudaremos Teoria da Medida na reta envolvendo a integral de Lebesgue e funções absolutamente contínuas.

Podemos ver em Lima (2013) e Royden (2010) que algumas funções "simples" não são integráveis à Riemann, por exemplo, a função de Dirichlet no intervalo $[0,1]$ que é praticamente constante (um em $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ e zero em $\mathbb{Q}^c \cap [0,1]$) não é integrável a Riemann. Diante deste problema, buscamos extender o conceito de integral de modo que, pelo menos, toda função limitada em um intervalo limitado seja integrável. Lima e Royden apontam que o estudo da Teoria da Medida consegue contornar tais dificuldades e generalizar ainda mais a integral de Riemann através da integral de Lebesgue.

A partir da construção da Teoria de Medida e da Integral de Lebesgue podemos integrar um número maior de funções e assim analisar nosso problema com um olhar diferente sobre a integral. Veremos que, através dessa teoria podemos estabelecer um critério necessário e suficiente para que valha o TFC.

A teoria estudada tem aplicações relevantes em probabilidade, espaços L^p, Equações Diferenciais Ordinárias e aplicações na mecânica quântica. Por exemplo, os espaços $L^2(\mathbb{R})$, chamados de espaços de Hilbert, os quais são extremamente importantes na mecânica quântica e são definidos utilizando a integral de Lebesgue.

O presente trabalho possui seis capítulos, sendo esta introdução o primeiro deles. No capítulo dois abordamos a metodologia empregada, no qual descrevemos as etapas deste trabalho e como foi realizada a pesquisa, iniciando com um problema norteador e, utilizando-se das teorias já criadas, passamos a respondê-lo. Assim, utilizamos a pesquisa bibliográfica para conduzir nosso trabalho, pois pensamos que esta seria mais eficiente para responder à pergunta levantada.

Uma contextualização histórica é feita no terceiro capítulo. Nela percebemos uma evolução do pensamento analítico e no rigor e formalismo matemático que envolvem o Cálculo Diferencial e Integral e a Análise Real.

No capítulo seguinte apresentamos a teoria preliminar, trazendo conceitos e definições, para tópicos como: topologia na reta, limite de funções, funções contínuas, derivadas e integral de Riemann.

O capítulo 5 versa sobre a Teoria da Medida, envolvendo diversos tópicos como: sigma-álgebras, medidas, espaço de medidas, conjuntos mensuráveis a Lebesgue, funções mensuráveis, integral de Lebesgue, funções absolutamente contínuas e um importante exemplo onde é construída uma função contínua e derivável quase sempre mas que não satisfaz o TFC.

A conclusão do trabalho encontra-se no capítulo 6, onde respondemos à pergunta inicial e apontamos a integral de Lebesgue como uma generalização da integral de Riemann.

2 Metodologia

Visto que a teoria base necessária para realização desta pesquisa já se encontra consolidada em livros, artigos, dissertações, teses e outros, optamos por realizar uma pesquisa bibliográfica. Pensamos que este tipo de pesquisa é mais adequado para nos proporcionar um caminho para a obtenção da resposta da nossa pergunta.

Segundo Gil (2010) uma pesquisa bibliográfica segue as seguintes etapas:

> i) escolha do tema;
> ii) levantamento bibliográfico preliminar;
> iii) formulação do problemas;
> iv) elaboração do plano provisório de assunto;
> v) busca das fontes;
> vi) leitura do material;
> vii) fichamento;
> viii) organização lógica do assunto;
> iix) redação do texto.(GIL, 2010, pg.45)

Iniciamos a nossa pesquisa na escolha do tema, a partir daí, foi possível realizar o levantamento bibliográfico preliminar embasado em livros tidos como referência no assunto, entre eles [11] e [7]. Feito isso, foi possível formular o problema e um plano provisório de assuntos a serem pesquisados, criando assim uma estrutura para o trabalho, de forma que as partes estejam vinculadas entre si e ordenadas facilitando a contrução do conhecimento.

Durante a busca das fontes, além dos trabalhos bibliográficos que já haviam sido escolhidos, foram selecionadas algumas obras para estudo. Para complementar nosso levantamento procuramos determinar algumas bibliografias complementares. Para o apoio sobre o tema no sentido teórico e formal foram selecionados [12], [6], [3] e [9] enquanto que para um levantamento mais histórico sobre o tema optamos por [4] e [10].

Com algumas fontes já definidas, foi possível iniciar a leitura sobre o tema e elencar suas ramificações, e desse modo, fazer o fichamento sobre os conceitos importantes para a compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo, são eles: topologia da reta, limites, continuidade, diferenciabilidade, integrabilidade, teoria da medida, integral de Lebesgue, funções absolutamente contínuas e as devidas implicações destes conceitos.

O trabalho seguiu-se através da definição de alguns conceitos fundamentais para a compreenção da integral de Lebesgue e da caracterização de funções absolutamente contínuas. Desta forma, foi possível analisar o problema norteador para a pesquisa, bem como uma resposta para a questão apresentada.

3 Embasamento Histórico

O Cálculo Diferencial e Integral tal como conhecemos hoje é um campo recente da matemática que começou a ser pensado e explorado, no século XVII. Entretanto, as ideias que contribuíram para seu desenvolvimento surgiram séculos antes de Cristo.

As ideias iniciais são datadas da Antiguidade[1], embora não tenha tido um desenvolvimento formal e rigoroso, o pensamento era baseado na intuição e observação da realidade. A principal finalidade do Cálculo, naquela época, era o cálculo de áreas, volumes, desenhos de retas tangentes a curvas e movimentos de corpos celestes.

Os astrônomos babilônicos (1800 a.C. - 1600 a.C.) foram os primeiros, que se tem conhecimento, a empregar o uso do Cálculo e métodos geométricos para prever a posição e órbita dos astros, tais técnicas iniciaram a ideia do Cálculo Diferencial. Posteriormente, Eudoxo[2] apresentou um avanço fundamental para a ideia inicial do Cálculo Integral. Ele desenvolveu o método da exaustão, que consiste em inscrever, em uma figura, com certas propriedades, uma sequência de polígonos, cuja soma das áreas converge para a área da figura desejada. Desta forma, se a sequência for corretamente construída, a diferença entre as somas das áreas do primeiro termo até o n-ésimo termo se tornará arbitrariamente pequena à medida que n aumenta.

Durante a Idade Média[3], devido a expansão da igreja católica nos países europeus, as ciências da época passaram por um período caracterizado pela escassez de registros. Além disso, houve o surgimento de uma sombra frente as artes e as ciências, impedindo-as de florescerem livremente na Europa. Enquanto os países católicos estagnaram seu desenvolvimento científico, os países não católicos continuaram a progredir no desenvolvimento da matemática e ciências.

Na Idade Moderna[4], a Europa acabara de sair da idade das trevas fazendo com que as artes e ciências voltassem a se desenvolver em ritmo acelerado. A matemática desenvolvia-se rapidamente, e um novo campo estava sendo apresentado pelo filósofo e matemático René Descartes[5] no apêndice *La Géométrie* de sua obra *Discours de la méthode*, essa nova área foi chamada de Geometria Analítica. Segundo Struik (1992),

---

[1] Período que se estende desde a invenção da escrita (de 4 000 a.C. a 3 500 a.C.) até a queda do Império Romano do Ocidente (476 d.C.)

[2] Matemático grego nascido em Cnidos (408 a.C. 355 a.C.)

[3] Período da história da Europa entre os séculos V e XV

[4] Período da História que tem início em 1453 com a tomada de Constantinopla pelos turcos otomanos indo até 1789 com o início da Revolução Francesa

[5] Filósofo, físico e matemático francês (1596 - 1650), segundo [10] foi um dos precursores da Geometria Analítica

> É verdade que este ramo da matemática se desenvolveu sob a influência do livro de Descartes, mas dificilmente *La Géométrie* pode ser considerada um primeiro texto sobre este assunto. Não existem aí, explicitamente, eixos "cartesianos" e não são deduzidas equações da linha recta e das secções cónicas, embora haja algumas equações do segundo grau que são interpretadas como representativas de secções cónicas. (STRUIK, 1992; p. 165)

Desta forma, os méritos de Descartes estão principalmente na aplicação da Álgebra desenvolvida no século XVI com análise geométrica dos antigos, ampliando o número de aplicações.

No período entre 1630 e 1660, vários aspectos característicos do cálculo infinitesimal começaram a aparecer. Por volta de 1637, o matemático Pierre de Fermat[6] publicou um trabalho sobre quadraturas e tangentes a curvas e, em 1638, foi registrada a criação de um método para encontrar os máximos e mínimos de funções.

Segundo Eves(2011) o método consiste em:

> Se $f(x)$ tem um máximo ou mínimo comum em x e se e é muito pequeno, então o valor $f(x-e)$ é quase igual ao de $f(x)$. Portanto, pode-se experimentar fazer $f(x-e) = f(x)$ e, para tornar essa igualdade correta, impor que e assuma o valor zero. As raízes da equação resultante darão, então, os valores de x para os quais $f(x)$ assume um máximo ou mínimo. (EVES, 2011; p. 429)

Embora o método descrito por Fermat seja rudimentar e não tinha fundamentação matemática. Vê-se que o método equivale a impor $\lim\limits_{h \to 0} = \dfrac{f(x-h) - f(x)}{h} = 0$. Tal notação e fundamentação somente foi introduzida e formalizada no século XIX.

Influenciado pelo trabalho dos matemáticos John Wallis[7] e Isaac Barrow[8], o matemático e físico inglês Isaac Newton[9] desenvolveu sua própria matemática, primeiro formulando o teorema do binômio generalizado e, posteriormente, o método dos fluxos, conhecido atualmente como Cálculo Diferencial. Tais registros foram publicados em 1687 no livro *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Embora diversos livros de Cálculo

[6]Matemático e cientista francês (1601 - 1665)

[7]Matemático britânico (1616 - 1703)

[8]Matemático francês (1630 - 1677), teve fundamental importância na vida de Newton, de acordo com [4]

[9]Matematico e físico inglês (1643 - 1727), responsável pelo estudo do Cálculo Diferencial e Integral, expansão de $(a+b)^n$ para n fracionário ou inteiro negativo. Teve fundamental importância no estudo da óptica, lei da gravitação universal e movimentos de corpos celestes

considerem que Newton tenha desenvolvido a diferenciação, ele registrou na primeira edição de seu livro[10]:

> Em cartas que troquei com o excelente geômetra, G. W. Leibniz, dez anos atrás, quando eu anunciei que eu tinha conhecimento de um método para determinar máximos e mínimos, de traçar tangentes e coisas similares, [...] aquele homem distinto respondeu que também havia obtido um método do mesmo tipo e comunicou seu método, que pouco diferencia do meu, exceto nas suas formas das palavras e símbolos.(NEWTON, 1686)

Gottfried Wilhem Leibniz[11] publicou seu primeiro artigo sobre o Cálculo Diferencial em 1684 e seu método não se diferenciava do de Newton apenas pelas palavras e símbolos, como descrevia ele, mas também pelos conceitos fundamentais. Enquanto Newton utilizava quantidades infinitamente pequenas, Leibniz tornou as próprias quantidades infinitamente pequenas, assim, os dois desenvolveram conceitos diferenciados para a fundamentação e desenvolvimento da diferenciação. Simbolicamente, Newton usava a notação com pontos, ou seja, $\dot{x}$ para denotar o fluxo em x com relação ao tempo, enquanto que Leibniz desenvolveu a notação $\dfrac{dx}{dt}$.

Newton e Leibniz formularam, concomitantemente ao Cálculo Diferencial, o Cálculo Integral, o qual se apresentava como um melhoramento do método da exaustão de Eudoxo e visava calcular a área abaixo de funções. Mesmo que para ambos, o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral fossem operações totalmente distantes e sem relação, foi devido a publicação do Teorema Fundamental do Cálculo por Isaac Barrow, que ambos mudaram seus pontos de vista.

Definições formais e rigorosas sobre o Cálculo Diferencial e Integral foram formuladas por Cauchy[12] e Riemann[13] no século XIX, essas ideias desempenharam um papel fundamental na Análise Matemática. Anos mais tarde, com o surgimento da Teoria da Medida, Lebesgue[14] generalizou o conceito da integral e ampliou ainda mais suas aplicações, sendo atualmente uma ferramenta de grande importância para a análise real.

[10]Traduzido a partir da edição da University of California Press (*Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy, and his System of the World*, feita por Andrew Motte a partida da edição latina, em 1729, revisada e acrescida de notas histócias por Florian Cajori, em 1934, página 415

[11]Matemático alemão (1646 - 1716), responsável pelo estudo do Cálculo Diferencial e Integral, foi um dos maiores inventores de símbolos matemáticos segundo [14]

[12]Matemático francês (1789 - 1857), famoso por introduzir o rigor na análise matemática

[13]Matemático alemão (1826 - 1866), famoso por definir rigorosamente a integral de uma função em um intervalo e suas contribuições para a Análise e a Geometria Diferencial

[14]Matemático francês (1875 - 1941), famoso pela generalização do conceito de integral e suas contribuições para teorida de medida

4 Teoria preliminar

Esse capítulo tem como principal objetivo apresentar a fundamentação teórica necessária para a compreensão do restante do trabalho. As definições, lemas, teoremas e demonstrações expostas ao longo do texto foram adaptadas de [1] a [11].

4.1 Topologia na Reta

O presente subcapítulo visa apresentar as principais propriedades topológicas dos subconjuntos da reta, fornecendo um terreno para os conteúdos a serem introduzidos posteriormente.

Utilizaremos, a linguagem geométrica segundo a qual nos referimos ao corpo $\mathbb{R}$ como "a reta", os números reais serão chamados de "pontos", definiremos "$a < b$"por a está a esquerda de b, dados dois números reais a, b, interpretaremos $|a - b|$ como "a distância do ponto a ao ponto b" e o intervalo [a, b] como o segmento de reta cujos extremos são os pontos a e b.

Definição 4.1. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Um número real y é chamado supremo de A se dado $\varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que se $x + \varepsilon > y$ e $y \geq x$, $\forall\ x \in A$ então $y = \sup A$.

Definição 4.2. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Um número real y é chamado ínfimo de A se dado $\varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ tal que se $x - \varepsilon < y$ e $y \leq x$, $\forall\ x \in A$ então $y = \inf A$.

Definição 4.3. Um ponto x é dito ponto interior de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, se, e somente se, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$. Denotamos o conjunto dos pontos interiores de X por $\text{int}(X)$.

Observação 4.4. Equivalentemente, isso quer dizer que todos os pontos suficientemente próximos de x ainda pertencem ao conjunto X. Note que, se um conjunto X possui algum ponto interior, ele deve conter pelo menos um intervalo aberto, logo o conjunto X é infinito.

Definição 4.5. Um conjunto chama-se conjunto aberto quando todos os seus pontos são interiores. Ou seja, se X é aberto então $X = \text{int}(X)$.

Exemplo 4.6. O conjunto vazio é aberto.

Demonstração. Pela Definição 4.5, temos que se $\emptyset$ é aberto então $\emptyset = \text{int}(\emptyset)$. Por absurdo, vamos supor que $\text{int}(\emptyset) \neq \emptyset$, logo $\exists\ a \in \emptyset$ que não é ponto interior, o que é um absurdo, pois o conjunto vazio não possui elementos. Consequentemente $\text{int}(\emptyset) = \emptyset$. $\square$

Exemplo 4.7. O conjunto dos números reais é aberto.

Definição 4.8. Um ponto a é aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se, e somente se, para todo $\delta > 0$, $(a - \delta, a + \delta) \cap X \neq \varnothing$.

Observação 4.9. Note que, todo ponto interior a de um conjunto X, também é aderente ao conjunto X, basta tomar a sequência de pontos $x_n = a$. Entretanto, pode-se ter a aderente a X sem que a pertença a X.

Exemplo 4.10. Dado intervalo $X = (0, 1)$, temos que o conjunto dos pontos aderentes a X é o intervalo $[0, 1]$. Note que, 0 e 1 não pertencem a X, mas são aderentes a X, pois $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$ onde $\dfrac{1}{n} \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $1 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ onde $1 - \dfrac{1}{n} \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 4.11. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, todo ponto aderente a X pertence a X.

Teorema 4.12. *Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado em $\mathbb{R}$ se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R} - F$ é aberto.*

Demonstração em [11], página 171.

Exemplo 4.13. O conjunto vazio é fechado.

Demonstração. Tendo em vista que o complementar do conjunto vazio é o conjunto dos números reais e tal conjunto é aberto, temos pelo Teorema 4.12 que o conjunto vazio é fechado. $\square$

Exemplo 4.14. O conjunto dos números reais é fechado.

Definição 4.15. Um número $a \in \mathbb{R}$ chama-se ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando todo intervalo aberto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ de centro a, contém algum ponto $x \in X$ diferente de a. Denotamos o conjunto dos pontos de acumulação de X por X'. Simbolicamente temos que a é um ponto de acumulação se,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in X \text{ tal que } 0 < |x - a| < \varepsilon.$$

Definição 4.16. Dizemos que X tem ponto de acumulação à esquerda de a se para todo o intervalo $(a - \varepsilon, a]$, com $\varepsilon > 0$ contiver algum ponto de X diferente de a. Denotamos o conjunto dos pontos de acumulação à esquerda de X por X'_-.

Definição 4.17. Dizemos que X tem ponto de acumulação à direita de a se para todo o intervalo $[a, a + \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$, contiver algum ponto de X diferente de a. Denotamos o conjunto dos pontos de acumulação à direita de X por X'_+.

Teorema 4.18. *Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $a \in X'$;

ii) $a = lim\ x_n$, onde (x_n) é uma sequência de elementos de X, dois a dois distintos;

iii) todo intervalo aberto contendo a possui uma infinidade de elementos de X.

Demonstração em [11], página 176.

Definição 4.19. Uma cobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma família $\mathcal{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathrm{L}}$ de conjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}$, tais que $X \subset \bigcup_{\lambda \in \mathrm{L}} C_\lambda$.

Definição 4.20. Uma subcobertura de $\mathcal{C}$ é uma subfamília $\mathcal{C}' = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \mathrm{L'}}$, L'⊂L, tal que ainda se tem $\bigcup_{\lambda \in \mathrm{L'}} C_\lambda$.

Uma cobertura, tem por finalidade "cobrir" um conjunto qualquer através de uma união, finita ou infinita, de intervalos, disjuntos ou não. Já a ideia de subcobertura, seria recobrir o mesmo conjunto só que com uma menor união utilizando os mesmos intervalos da cobertura.

Exemplo 4.21. Os intervalos $C_1 = (0,3)$, $C_2 = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$ e $C_3 = \left(\frac{5}{2}, 5\right)$ constituem uma cobertura $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$ do intervalo $\left(2, \frac{9}{2}\right)$, com L $= \{1,2,3\}$, pois $\left(2, \frac{9}{2}\right) \subset (C_1 \cup C_2 \cup C_3) = (0,5)$. Note que, tomando L' $= \{2,3\}$ temos a subfamília $\mathcal{C}' = \{C_2, C_3\}$, a qual forma uma subcobertura de $\mathcal{C}$, pois ainda vale que $\left(2, \frac{9}{2}\right) \subset (C_2 \cup C_3) = \left(\frac{3}{2}, 5\right)$.

Teorema 4.22. *As seguintes afirmações a respeito de um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:*

i) K é limitado e fechado;

ii) toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita;

iii) todo subconjunto infinito de K possui ponto de acumulação pertencente a K;

iv) toda sequência de pontos de K possui uma subsequência que converge para um ponto de K.

Demonstração pode ser encontrada em [11], página 182.

Definição 4.23. Definimos um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ como compacto, um conjunto que cumpre uma das, e portanto todas as, condições do Teorema 4.22.

Exemplo 4.24. O intervalo $[a,b]$ é compacto. Qualquer intervalo limitado e fechado é compacto.

Exemplo 4.25. O conjunto dos números reais não é compacto, pois não é limitado.

4.2 Limite de Funções

O presente subcapítulo visa definir a noção de limite de funções, que nos permite estudar o comportamento de uma função $f(x)$ à medida que x se aproxima de um determinado valor, mas não assume este valor. A construção de tal pensamento é fundamental para o pleno entendimento dos próximos capítulos.

Definição 4.26. Definiremos o limite de $f(x)$ quando x tende para a, como o número real L, quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Simbolicamente temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{L} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in X \text{ e } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon.$$

Observação 4.27. Note que, o limite de $f(x)$ tendendo a L significa que é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, desde que se tome valores de $x \in X$ suficientemente próximos de a, mas diferentes de a.

Definição 4.28. Diremos que o número real L é o limite à direita de $f(x)$ quando x tende a a, denotado por $\lim_{x \to a^+} f(x) = \mathrm{L}$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, for possível obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < x - a < \delta$. Simbolicamente, temos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \mathrm{L} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in X \text{ e } 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon.$$

Definição 4.29. Diremos que o número real L é o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende a a, denotado por $\lim_{x \to a^-} f(x) = \mathrm{L}$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, for possível obter $\delta > 0$ tal que $|f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < a - x < \delta$. Simbolicamente, temos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \mathrm{L} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in X \text{ e } 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon.$$

Teorema 4.30. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+ \cap X'_-$. Então existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$.*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [11], página 206.

4.3 Funções Contínuas

Este subcapítulo visa definir uma função contínua a partir do conceito de limite de funções e apresentar algumas consequências da continuidade.

Definição 4.31. Uma $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ pudermos obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ implique em $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Simbolicamente temos:

$$\forall\ \varepsilon > 0,\quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in X \text{ e } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Diremos, simplesmente, que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, quando f for contínua em todos os pontos.

Temos que se f é contínua $a \in X$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Definição 4.32. Dada $f : X \to \mathbb{R}$, um ponto de descontinuidade da função f é um ponto $a \in X$ tal que f não é contínua no ponto a.

Exemplo 4.33. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ com $X = \mathbb{R} - \{0\}$ definida da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ \ \ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Temos que f é contínua, pois:

Fixado $a > 0$. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $x \in \mathbb{R}_+^*$ e $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$. Fixado $b < 0$. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $x \in \mathbb{R}_-^*$ e $|x - b| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| = |(-1) - (-1)| = 0 < \varepsilon$.

Logo f é contínua em $\mathbb{R} - \{0\}$.

Teorema 4.34. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Então, f é limitada.*

A demonstração deste resultado pode ser vista em [7], página 66.

Teorema 4.35. *(Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demostração em [11], página 234.

Observação 4.36. O Teorema 4.35, vale também para o caso em que $f(b) < d < f(a)$.

Teorema 4.37. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Se X é compacto, então $f(X)$ é compacto.*

A prova deste resultado pode ser vista em [11], página 238.

Teorema 4.38. *(Teorema de Weierstrass) Seja $X = [a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Então existem m e $M \in [a, b]$ tais que, para todo $x \in [a, b]$, $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$.*

Demonstração. Pelo teorema 4.37, temos que $f(X)$ é compacto, pois X é compacto, ou seja, é limitado e fechado. Logo, $\sup f(X) \in f(X)$ e $\inf f(X) \in f(X)$. Portanto existem m e $M \in X$ tais que $\inf f(X) = f(m)$ e $\sup f(X) = f(M)$. $\square$

Definição 4.39. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ como contínua uniformemente, quando para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\forall\, x, y \in X$ e $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Observação 4.40. Note que, toda função uniformemente contínua é contínua. Entretanto a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 4.41. Seja $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Mostraremos que f não é uniformemente contínua.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, suponhamos ter escolhido $\delta > 0$. Tomamos um número positivo a tal que $0 < a < \varepsilon$ e $0 < a < \dfrac{1}{3\varepsilon}$. Então, para $x = a + \dfrac{\delta}{2}$ e $y = a$, temos $|x - y| < \delta$, mas $\left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right| = \left|\dfrac{1}{a + \dfrac{\delta}{2}} - \dfrac{1}{a}\right| = \left|\dfrac{2}{2a + \delta} - \dfrac{1}{a}\right| = \dfrac{\delta}{a(2a + \delta)} > \dfrac{\delta}{3\delta \cdot a} = \dfrac{1}{3a} > \varepsilon$

Logo, não existe $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ implique em $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. □

Teorema 4.42. *Seja X compacto. Toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração pode ser encontrada em [11], página 243.

4.4 Derivadas

Este subcapítulo apresenta as principais definições e teoremas envolvendo as derivadas de funções reais de uma variável real. Para melhor entendimento, continuamos a utilizar a linguagem geométrica apresentada em topologia.

Definição 4.43. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$, ou seja, a pertence a X e é um ponto de acumulação de X. Diremos que f é derivável no ponto a quando existir o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Caso exista, o limite $f'(a)$ chama-se a derivada de f no ponto a.

A função $g : X - \{a\} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, representa, geometricamente, a inclinação (ou coeficiente angular) da secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$. A reta que passa pelo ponto $(a, f(a))$ e tem inclinação igual a $f'(a)$, quando $f'(a)$ existe, chama-se tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Geometricamente obter a inclinação da reta tangente, é obter o limite das inclinações das retas secantes que passam pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$, fazendo com que x tenda a a.

Definição 4.44. Definimos a derivada à direita da função f no ponto a, quando $a \in X \cap X'_+$ (a é um ponto de acumulação à direita de X e a ele pertence), como sendo o limite:

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Definição 4.45. Definimos a derivada à esquerda da função f no ponto a, quando $a \in X \cap X'_-$ (a é um ponto de acumulação à esquerda de X e a ele pertence), como sendo o limite:

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Temos que $f'(a)$ existe se, e somente se, existem, e são iguais, as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$.

Definição 4.46. Diremos que $f : X \to \mathbb{R}$ é derivável no conjunto X quando existir a derivada de f em todos os pontos $a \in X \cap X'$.

Exemplo 4.47. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Temos que $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$. Logo, não existe $f'(0)$.

Teorema 4.48. *Se existe a derivada $f'(a)$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Como f é derivável no ponto a então existe $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Devemos provar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou equivalentemente, $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$. Temos que,

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Logo, f é contínua no ponto a. □

Observação 4.49. Note que, embora a função do exemplo anterior não possua derivada no ponto $x = 0$, a função é contínua no ponto. Logo, a recíproca do Teorema 4.48 não é verdadeira.

Teorema 4.50. *(Teorema de Rolle) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe um ponto $c \in (a, b)$ onde $f'(c) = 0$.*

A prova deste resultado pode ser vista em [11], página 271.

Teorema 4.51. *(Teorema do Valor Médio) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Seja $g(x)$ o polinômio de grau menor ou igual a 1 tal que $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b)$. Então, temos que $g'(x)$ é constante e, $g'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ para todo x do domínio. Definimos a função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, por $h(x) = f(x) - g(x)$, satisfazendo assim as hipóteses do Teorema 4.50. Logo, existe $c \in [a, b]$, tal que $h'(c) = 0$, ou seja, $f'(c) = g'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

O teorema anterior, significa, geometricamente, que a tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa c é paralela à secante que passa pelos pontos de f com abscissas em a e b.

4.5 Integral de Riemann

Este subcapítulo apresenta as principais definições e teoremas acerca da integral de Riemann com o objetivo de criar uma base sólida e fundamentada para a demonstração e estudo do Teorema Fundamental do Cálculo.

Consideraremos funções reais $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas num intervalo compacto $[a, b]$ e também limitadas neste intervalo, ou seja, existem números reais m, M tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, deste modo, todos os valores de $f(x)$ pertencem ao intervalo compacto $[m, M]$.

Definição 4.52. Definimos a área interna de $f(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$ como a região limitada pelo gráfico de f, pelo segmento [a, b] contido no eixo das abscissas e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$. Também podemos definir a região da seguinte maneira:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Definição 4.53. Uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito $P \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$. Quando escrevermos $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ convencionaremos sempre que $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$.

Definição 4.54. Os intervalos $[t_{i-1}, t_i], i = 1, ..., n$, serão chamados de intervalos da partição P.

Definição 4.55. Para cada $i = 1, ..., n$ indicaremos com m_i o ínfimo e com M_i o supremo dos valores de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Definição 4.56. (Somas de Riemann) Definiremos a soma inferior, denotada por $s(f; P)$, e a soma superior, denotada por $S(f; P)$, da função f relativamente à partição P como:

$$s(f; P) = m_1 \cdot (t_1 - t_0) + m_2 \cdot (t_2 - t_1) + ... + m_n \cdot (t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$

e

$$S(f;P) = M_1 \cdot (t_1 - t_0) + M_2 \cdot (t_2 - t_1) + ... + M_n \cdot (t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Os valores das somas $s(f;P)$ e $S(f;P)$ aproximam a área compreendida entre o gráfico de uma função não negativa e o eixo das abscissas através da soma de áreas de retângulos. Sendo que as somas inferiores, aproximam a área, por retângulos de altura igual ao ínfimo de f no intervalo, logo uma aproximação por falta, e nas somas superiores, aproximam a área, por retângulos de altura igual ao supremo de f no intervalo, logo uma aproximação por excesso. Os comprimentos dos intervalos da partição P, $(t_1 - t_0), (t_2 - t_1), ..., (t_n - t_{n-1})$, representam os comprimentos das bases dos retângulos, enquanto os valores dos m_i e M_i representam as alturas de cada um retângulos.

Definição 4.57. Definimos $\mathcal{P}$ como o conjunto de todas as partições do intervalo $[a,b]$.

Definição 4.58. Definimos integral inferior, denotada por $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ e a integral superior, denotada por $\overline{\int_a^b} f(x)dx$, de uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{P \in \mathcal{P}} s(f;P) \text{ e } \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{P \in \mathcal{P}} S(f;P).$$

Definição 4.59. Uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ chama-se *integrável* quando

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Ou seja, quando a integral superior e a integral inferior são iguais chamamos apenas de *integral* e indicamos por $\int_a^b f(x)dx$.

Exemplo 4.60. (Função de Dirichlet) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por partes da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \\ 0, & \text{se } x \in [a,b] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Note que, dada qualquer partição P de $[a,b]$, sempre temos $m_i = 0$ e $M_i = 1$, para todo $i = 1, ..., n$, pois todo o intervalo real contém números racionais e irracionais. Logo, $s(f;P) = 0$ e $S(f;P) = b - a$ para qualquer partição de P. Portanto,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx = b - a$$

Logo, f não é integrável.

Observação 4.61. Afirmar que f positiva é integrável significa, geometricamente, que as aproximações por falta e por excesso para a área abaixo da função convergem, ao refinarmos a partição, para o mesmo resultado, isto é, está bem definida a área sob o gráfico da f.

No caso da função do Exemplo 4.60, se definirmos o domínio como o intervalo $[0,1]$, a função tem integral inferior igual a 0 e integral superior igual a 1, logo não possui uma área bem definida. Sendo assim, não é uma função integrável a Riemann.

Teorema 4.62. *Toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

A demonstração deste teorema pode ser vista em [11], página 319.

Teorema 4.63. *Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, existe $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $F' = f$.*

Demonstração. Para tal, basta tomar $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. □

Definição 4.64. Definimos *primitiva* de uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ como uma função derivável $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$.

Teorema 4.65. *(Teorema Fundamental do Cálculo) Se uma função integrável $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possui uma primitiva $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Ou seja, se uma função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, então*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx.$$

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio (Teorema 4.51) sabemos que para qualquer partição $P = \{t_0, ..., t_n\}, \exists\, \xi_i \in (t_{i-1}, t_i),$ para todo $1 \leq i \leq n$, tais que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(t_i) - F(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Sejam $m_i' = \inf\limits_{x \in [t_{i-1}, t_i]} F'(x)$ e $M_i' = \sup\limits_{x \in [t_{i-1}, t_i]} F'(x)$. Temos que $m_i' \leq F'(\xi_i) \leq M_i'$, ou seja, F' é limitada. Segue que

$$s(F'; P) \leq F(b) - F(a) \leq S(F'; P)$$

então, tomando $\sup\limits_{P \in \mathcal{P}} s(F'; P)$ e $\inf\limits_{P \in \mathcal{P}} S(F'; P)$, obtemos

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Como f é integrável, $\underline{\displaystyle\int_a^b} f(x)dx = \overline{\displaystyle\int_a^b} f(x)dx = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$, daí

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

5 Teoria da Medida

Nossa revisão bibliográfica aponta que um caminho viável para obter uma resposta para o problema apresentado é o estudo da Teoria da Medida. Neste capítulo vamos estudar os conceitos básicos que norteiam tal teoria, apresentando definições, teoremas, proposições e exemplos de forma a guiar nossa pesquisa a uma resposta.

5.1 Álgebras

Definição 5.1. Dado conjunto Ω, com $\Omega \neq \emptyset$, uma álgebra em Ω é uma coleção $A \subset P(\Omega)$, se A possui as seguintes propriedades:

i) $\emptyset \in A$;
ii) Se $E \in A$, então $E^{\mathrm{c}} \in A$;
iii) Se $C \in A$ e $D \in A$, então $C \cup D \in A$.

Definição 5.2. Dado conjunto Ω, com $\Omega \neq \emptyset$, uma σ-álgebra em Ω é uma coleção $A \subset P(\Omega)$, se A possui as seguintes propriedades:

i) $\emptyset \in A$;
ii) Se $E \in A$, então $E^{\mathrm{c}} \in A$;
iii) Se E_1, E_2, E_3,... $\in A$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in A$

Exemplo 5.3. Seja $X = \{1, 2, 3\}$, o conjunto $\Sigma = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}$ é uma σ-álgebra de X.

Proposição 5.4. *Dada qualquer coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω, existe uma menor álgebra $\mathcal{A}$ que contém $\mathcal{C}$, ou seja, existe uma álgebra $\mathcal{A}$ que contém $\mathcal{C}$ e de tal modo que se $\mathcal{B}$ é uma álgebra que contém $\mathcal{C}$, então $\mathcal{B}$ contém $\mathcal{A}$.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [12], página 17.

Definição 5.5. A σ-álgebra gerada pela família de abertos de $\mathbb{R}$ é conhecida como σ-álgebra de Borel ($\mathcal{B}$) e é a menor σ-álgebra que contém os intervalos abertos ou fechados, limitados ou ilimitados da reta real.

Nos seguintes subcapítulos estudaremos propriedades da σ-álgebra de Borel e do conjunto dos números reais estendidos. Tal conjunto, denotado por $\overline{\mathbb{R}}$, é definido por $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e adotamos as convenções usuais de ordem e de soma:

i) Adição: $\infty + \infty = \infty + a = a + \infty = \infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$;
ii) Subtração: $\infty - a = \infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$; mas $\infty - \infty$ não está definido;
iii) Multiplicação: $\infty \cdot \infty = a \cdot \infty = \infty$ para todo $a > 0$ e convencionamos $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

5.2 Medidas

Definição 5.6. Uma medida μ em $\overline{\mathbb{R}}$ com σ-álgebra de Borel ($\mathcal{B}$) é uma função $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ tal que:

i)$\mu(\emptyset) = 0$;

ii)Se $\{E_i\} \subset \mathcal{B}$, com $i \in \mathbb{N}$, é uma coleção enumerável disjunta, então

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu \left(E_i \right).$$

A propriedade ii é chamada de σ-aditividade ou aditividade enumerável, dela implica a aditividade finita, que é definada substituindo a propriedade ii por ii$_2$, da seguinte maneira:

ii$_2$) Se $E_1, E_2, ..., E_n \in \mathcal{A}$ são disjuntos, então

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \mu \left(E_i \right).$$

Caso a função μ possua a propriedade ii dizemos que μ é uma função σ-aditiva. Caso a função μ possua a propriedade ii$_2$ dizemos que μ é uma função aditiva.

Definição 5.7. Um espaço de medida é uma terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ em que X é um conjunto, $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra no conjunto X e $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ é uma função σ-aditiva.

Durante nosso estudo vamos nos deter a terna $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, \mu)$.

Definição 5.8. Dado intervalo I de extremos a e b com $a < b$ definimos a função comprimento $l(I) : S \to \overline{\mathbb{R}}$, em que S é o conjuntos dos intervalos da reta $\mathbb{R}$, da seguinte maneira:

$$l(I) = b - a.$$

Definição 5.9. Definimos a medida exterior de um conjunto A, denotado por m^*A, como o ínfimo entre as somas dos comprimentos dos intervalos de uma cobertura de A. Abreviadamente,

$$m^*A = \inf_{A \,\subset\, \cup I_n} \sum l(I_n).$$

Segue da definição que $m^*\emptyset = 0$ e que um conjunto formado por um único ponto tem medida exterior igual a zero.

Definição 5.10. Quando um conjunto tem medida exterior igual a zero, diz-se que é um conjunto de medida nula.

Proposição 5.11. *A medida exterior de um intervalo é o seu comprimento.*

Demonstração em [12], página 56.

Exemplo 5.12. Seja $A = [0,1]$, $B = (0,1]$, $C = (0,1)$, temos que $m^*A = m^*B = m^*C = 1$

Corolário 5.13. *Se A é enumerável então $m^*A = 0$.*

5.3 Conjuntos Mensuráveis

Definição 5.14. Um conjunto E é dito mensurável a Lebesgue se para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tivermos que $m^*A = m^*(A \cap E) + m^*(A - E)$.

Diremos apenas que um conjunto é mensurável quando este é mensurável a Lebesgue, caso contrário, será dito explicitamente.

Lema 5.15. *Se $m^*A = 0$, então A é mensurável.*

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [12], página 59.

Lema 5.16. *Se A_1 e A_2 são mensuráveis, então $A_1 \cup A_2$ é mensurável.*

Demonstração em [12], página 59.

Lema 5.17. *O intervalo (a, ∞) é mensurável.*

A prova deste lema pode ser encontrada em [12], página 60.

Teorema 5.18. *Cada conjunto de Borel é mensurável. Em particular, todo conjunto fechado e todo conjunto aberto é mensurável.*

A demonstração pode ser encontrada em [12], página 61.

Exemplos de conjuntos não mensuráveis podem ser encontrados em [13], página 47.

5.4 Funções Mensuráveis

Proposição 5.19. *Seja $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, em que A é mensurável. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i)Para cada número real α o conjunto $\{x : f(x) > \alpha\}$ é mensurável.

ii) Para cada número real α o conjunto $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ é mensurável.

iii) Para cada número real α o conjunto $\{x : f(x) < \alpha\}$ é mensurável.

iv) Para cada número real α o conjunto $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ é mensurável.

O que implica que v) Para cada número real estendido α o conjunto $\{x : f(x) = \alpha\}$ é mensurável.

A prova desta proposição pode ser encontrada em [12], página 67.

Definição 5.20. Uma função dos números reais estendidos é dita mensurável a Lebesgue caso seu domínio seja mensurável e satisfaça uma das quatro primeiras afirmações da Proposição 5.19.

Proposição 5.21. *Seja f uma função definida em um conjunto mensurável E. Então f é mensurável se, e somente se, para cada intervalo aberto X, a imagem inversa de X em f, $f^{-1}(X) = \{x \in E \text{ tal que } f(x) \in X\}$, é mensurável.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [13], página 55.

Proposição 5.22. *Se f é uma função contínua em um domínio mensurável então f é uma função mensurável.*

A prova deste resultado pode ser vista em [13], página 56.

Exemplo 5.23. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Temos que f é mensurável, pois para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(-\infty, a) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } a \leq 0 \\ (-\sqrt{a}, \sqrt{a}), & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

Definição 5.24. Uma propriedade é dita válida para uma função em quase todo ponto (q.t.p.) se o conjunto de pontos que ela falha possui medida nula.

Exemplo 5.25. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida da seguinte maneira:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ a, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad , \text{ com } \ a \in \mathbb{R}.$$

Temos que f é contínua em quase todo ponto.

Definição 5.26. Definimos a função característica de um conjunto A como

$$\chi_{A}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Definição 5.27. Uma função ψ definida em $[a, b]$ é chamada função escada quando existe uma partição $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ e números $c_1, c_2, ..., c_n$ de tal modo que para $1 \leq i \leq n$, tem-se que

$$\psi(x) = c_i \text{ se } x_{i-1} < x < x_i.$$

Note que,

$$s(\psi; P) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = S(\psi; P).$$

Definição 5.28. Uma função mensurável ψ definida em um conjunto E é chamada de simples quando assume um número finito de valores. Se ψ assume os valores $a_1, a_2, \ldots, a_n$ em E, então, como ψ é mensurável, temos que $\psi^{-1}(a_i)$ é mensurável e a representação canônica de ψ é

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \text{ em } E, \text{ onde cada } E_i = \psi^{-1}(a_i) = \{x \in E \mid \psi(x) = a_i\}.$$

O seguinte teorema nos diz que qualquer função pode ser aproximada por uma sequência de funções simples. No caso de uma função mensurável, podemos escolher funções simples mensuráveis.

Teorema 5.29. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função. Então existe uma sequência $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de funções simples tais que*

$$\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x), \forall\ x \in A.$$

Temos ainda que:
i) Se f é mensurável, os s_k podem ser escolhidos mensuráveis;
ii) Se $f \geq 0$, podemos escolher $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona crescente:

$$0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \cdots \leq s_k(x) \leq \cdots \leq f(x), \forall\ x \in A.$$

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [5], página 14.

A partir deste momento denotaremos a integral de Riemann da função f no intervalo $[a, b]$ por $(R)\displaystyle\int_a^b f$, A notação $\displaystyle\int_a^b f$ será utilizada para representar a integral de Lebesgue que será apresentada em seguida.

Podemos reformular as definições para integral inferior e integral superior de Riemann como

$$(R)\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{(R)\int_a^b \varphi \;\middle|\; \varphi \text{ é uma função escada e } \varphi \leq f \text{ em } [a, b]\right\}$$

e

$$(R)\overline{\int_a^b} f = \inf\left\{(R)\int_E \psi \;\middle|\; \psi \text{ é uma função escada e } f \leq \psi \text{ em } [a, b]\right\}.$$

Teorema 5.30. *Se f é monótona em um intervalo aberto (a, b), então f é derivável em q.t.p. de (a, b).*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [13], página 112.

5.5 Integral de Lebesgue

Definição 5.31. Definimos a integral de uma função simples ψ sobre um conjunto de medida finita E por

$$\int_E \psi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot m(E_i).$$

Onde ψ possui a representação canônica apresentada na Definição 5.28.

Proposição 5.32. *(Linearidade e Monotonicidade da Integração de Funções Simples) Seja φ e ψ funções simples definidas em um conjunto de medida finita E. Então para qualquer α e β, temos*

$$\int_E (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_E \varphi + \beta \int_E \psi.$$

Além disso,

$$\text{Se } \varphi \leq \psi, \text{ em } E, \text{ então } \int_E \varphi \leq \int_E \psi.$$

Demonstração em [13], página 72.

Definição 5.33. Definimos a integral inferior e superior de Lebesgue, respectivamente, de uma função f não negativa sobre E como

$$\sup \left\{ \int_E \varphi \;\middle|\; \varphi \text{ é simples e } \varphi \leq f \text{ em } E \right\}$$

e

$$\inf \left\{ \int_E \psi \;\middle|\; \psi \text{ é simples e } f \leq \psi \text{ em } E \right\}.$$

Desde que f seja limitada, pela monotonicidade da integração para funções simples temos que a integral inferior e superior são finitas e a integral superior é sempre, no mínimo, maior que a integral inferior.

Definição 5.34. Uma função limitada f em um domínio mensurável E é dita integrável à Lebesgue em E apenas quando as integrais inferior e superior de Lebesgue são iguais.

Teorema 5.35. *Seja f uma função definida em um intervalo fechado e limitada $[a, b]$. Se f é integrável à Riemann em $[a, b]$, então é integrável a Lebesgue em $[a, b]$, e as duas integrais são iguais.*

Esta demonstração pode ser encontrada em [13], página 73.

A recíproca deste teorema não é verdadeira.

Exemplo 5.36. Retomamos a função de Dirichlet apresentada no Exemplo 4.60, limitando-a ao intervalo $[0,1]$. Temos que $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ é definida por partes da seguinte forma:

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{se } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0, & \text{se } x\in[0,1]-\mathbb{Q}\end{cases}$$

Como apresentado anteriormente, f não é integrável a Riemann. Vejamos agora se f é integrável no sentido de Lebesgue. Reescrevendo f como uma função simples, temos que

$$f=\sum_{i=1}^{2}a_i\chi_{E_i} \text{ em que } a_1=1, E_1=\mathbb{Q}\cap[0,1], a_2=0 \text{ e } E_2=[0,1]-\mathbb{Q}.$$

Temos pela Definição 5.31, que

$$\int_{[0,1]}f=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot m(E_i)=1\cdot m(\mathbb{Q}\cap[0,1])+0\cdot m([0,1]-\mathbb{Q})=1\cdot m(\mathbb{Q}\cap[0,1]).$$

Pelo Corolário 5.13 temos que $m(\mathbb{Q}\cap[0,1])=0$. Temos que,

$$\int_{[0,1]}f=1\cdot 0=0.$$

Portanto, f é integrável no sentido de Lebesgue.

Teorema 5.37. *Seja f uma função mensurável limitada em um conjunto de medida finita E. Então f é integrável em E.*

Demonstração em [13] página 74.

Proposição 5.38. *(Linearidade e Monotonicidade da Integração de Funções Mensuráveis e Limitadas) Seja f e g funções mensuráveis e limitadas em um conjunto de medida finita E. Então para qualquer α e β, temos*

$$\int_E(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_E f+\beta\int_E g.$$

Além disso,

$$\text{Se } f\le g, \text{ em } E, \text{ então } \int_E f\le\int_E g.$$

Demonstração em [13] página 75.

Corolário 5.39. *(Aditividade de Domínios de Integralção de Funções Mensuráveis e Limitadas) Seja f uma função mensurável e limitada em um conjunto de medida finita E. Supondo A e B são subconjuntos mensuráveis e disjuntos de E. Então*

$$\int_{A\cup B}f=\int_A f+\int_B f.$$

A prova deste resultado pode ser encontrada em [13], página 76.

Definição 5.40. Definimos o conjunto suporte de uma função $f : X \to \mathbb{R}$ como

$$supp(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

Definição 5.41. Para uma função mensurável f não negativa em E, definimos a integral de f sobre E por

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E h \;\middle|\; h \text{ é limitada, mensurável, de suporte finito e } 0 \leq h \leq f \text{ em } E \right\}.$$

Proposição 5.42. *Seja f uma função mensurável não negativa em E. Então*

$$\int_E f = 0 \textit{ se, e somente se, } f = 0 \textit{ em q.t.p. de } E.$$

Demonstração em [13], página 80.

A demonstração da linearidade e monotonicidade de integração de funções mensuráveis não negativas podem ser encontradas em [13], página 81. A demonstração da aditividade sobre domínios de intregração para funções mensuráveis não negativas pode ser encontrada em [13] página 82.

Definição 5.43. Uma função mensurável e não negativa f definida em um conjunto mensurável E é dita integravel em E se

$$\int_E f < \infty.$$

Proposição 5.44. *Se f é uma função não negativa e integrável em E então f é finita em q.t.p. de E.*

Este resultado pode ser encontrado em [13], página 84.

Definição 5.45. Seja $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, definimos a parte positiva f^+ e a parte negativa f^- de f, respectivamente, por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \text{ para cada } x \in E.$$

Temos que f^+ e f^- são funções não negativas em E e

$$f = f^+ - f^- \text{ em } E$$

e

$$|f| = f^+ + f^- \text{ em } E.$$

Proposição 5.46. *Seja f uma função mensurável em E. Então f^+ e f^- são integráveis em E se, e somente se, $|f|$ é integrável em E.*

Demonstração em [13], página 85.

Definição 5.47. Uma função f mensurável em E é dita integrável em E se $|f|$ é integrável em E. Quando isso acontece definimos a integral de f sobre E por

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Proposição 5.48. *Seja f integrável em E. Então f é finita em q.t.p. de E e*

$$\int_E f = \int_{E-E_0} f \text{ se } E_0 \subseteq E \text{ e } m(E_0) = 0.$$

Demonstração em [13], página 86.

A demonstração da linearidade e monotinicidade da integração de funções pode ser encontrada na página 87 de [13]. A demonstração da aditividade de domínios de integração pode ser encontrada na página 88 de [13].

Teorema 5.49. *(Aditividade Contável da Integração) Seja f integrável em E e $\{E_n\}_{k=1}^{\infty}$ uma coleção contável e disjunta de subconjuntos mensuráveis de E cuja união é o proprío E. Então*

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f.$$

Este resultado pode ser encontrado em [13], página 91.

Teorema 5.50. *(Continuidade da Integração) Seja f integrável em E. Temos que*

i) Se $\{E_n\}_{k=1}^{\infty}$ é uma coleção crescente enumerável de subconjuntos mensuráveis de E, então

$$\int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f.$$

ii) Se $\{E_n\}_{k=1}^{\infty}$ é uma coleção decrescente enumerável de subconjuntos mensuráveis de E, então

$$\int_{\cap_{n=1}^{\infty} E_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f.$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [13], página 91.

Os teoremas 5.49 e 5.50 nos apresentam duas propriedades da integral de Lebesgue que não tem contrapartida na integral de Riemann.

Teorema 5.51. *Seja f uma função monótona em um intervalo aberto (a, b). Então f é contínua exceto possivelmente em um número contável de pontos em (a, b).*

Demonstração em [13], página 108.

Teorema 5.52. *Seja f uma função limitada em um conjunto de medida finita E. Então f é integrável a Lebesgue se, e somente se, f é mensurável.*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [13], página 104.

Teorema 5.53. *Seja f uma função limitada no intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Então f é integrável a Riemann em $[a, b]$ se, e somente se, o conjunto de pontos em $[a, b]$ que f não é contínua tem medida zero.*

A demonstração deste teorema pode ser consultada em [13], página 104.

Corolário 5.54. *Seja f uma função crescente no intervalo $[a, b]$. Então f' é integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f' \leq f(b) - f(a).$$

Demonstração em [13], página 113.

5.6 Funções Absolutamente Contínuas

Definição 5.55. Uma função real f definida sobre o intervalo fechado e limitado $[a, b]$ é chamada absolutamente contínua em $[a, b]$ se para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que, para toda coleção finita e disjunta $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ de intervalos abertos em (a, b),

$$\text{se } \sum_{k=1}^n [b_k - a_k] < \delta, \text{ então } \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Observação 5.56. Toda função absolutamente contínua é contínua. Entretanto, nem toda função contínua é absolutamente contínua.

Teorema 5.57. *Seja f absolutamente contínua e definida em um intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Então f é diferenciável em quase todo ponto em (a, b), sua derivada f' é integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Demonstração em [13], página 124.

Definição 5.58. Uma função F definida de um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ é dita integral indefinida de f sobre $[a, b]$ se f é integrável a Lebesgue em $[a, b]$ e

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Teorema 5.59. *Uma função f definida em um intervalo fechado e limitado $[a,b]$ é absolutamente contínua em $[a,b]$ se, e somente se, é igual a integral indefinida sobre $[a,b]$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [13], página 125.

Teorema 5.60. *Seja f uma função monótona definida em um intervalo fechado e limitado $[a,b]$. Então f é absolutamente contínua em $[a,b]$ se, e somente se,*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Demonstração. Pelo Teorema 5.57 temos que $\displaystyle\int_a^b f' = f(b) - f(a)$ é válido se f é absolutamente contínua, independente se é monótona ou não. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que f é crescente. Seja $x \in [a,b]$. Pela aditividade de domínios de integração, temos que,

$$0 = \int_a^b f' - [f(b) - f(a)] = \left\{ \int_a^x f' - [f(x) - f(a)] \right\} + \left\{ \int_x^b f' - [f(b) - f(x)] \right\}.$$

Pelo Corolário 5.54 temos que

$$\int_a^x f' - [f(x) - f(a)] \leq 0 \ \text{ e } \int_x^b f' - [f(b) - f(x)] \leq 0.$$

Se a soma de dois números não negativos é igual a 0, então ambos são 0. Portanto,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'.$$

Assim, f é a integral indefinida de f'. Logo, pelo Teorema 5.59, temos que f é absolutamente contínua. $\square$

5.7 Função de Cantor

Definição 5.61. *(Conjunto de Cantor)* Considere o intervalo fechado e limitado $I = [a, b]$. O primeiro passo para a construção do conjunto de Cantor no intervalo I é dividi-lo em três intervalos de igual comprimento $1/3$ e remover o intervalo do meio, ou seja, removemos o intervalo $(1/3, 2/3)$ do intervalo $[0, 1]$ para obter o conjunto fechado C_1, o qual é a união de dois conjuntos fechados e disjuntos medindo $1/3$.

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

Agora repetimos a remoção dos dois terços centrais dos dois intervalos de C_1, formando assim C_2, em que

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1].$$

Novamente repetimos a remoção do terço central dos intervalos de C_2, formando assim C_3. Assim, repetimos sucessivamente as remoções de forma a obter uma coleção contável de conjuntos $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$. Definimos o conjunto de Cantor, denotado por $\mathbf{C}$, como

$$\mathbf{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

Teorema 5.62. *O conjunto de Cantor é não enumerável, mas tem medida nula.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2], página 25.

Proposição 5.63. *Se $x \in \mathbf{C}$, então existe uma sequência (x_n) monótona tal que $\{x_n\} \subset \mathbf{C}^{\mathsf{c}}$ com $\lim x_n = x$.*

Demonstração. Note que $m(\mathbf{C}^{\mathsf{c}}) = 1$, pois $m(\mathbf{C}) = 0$, assim $\mathbf{C} = 0$ não contém nenhum intervalo. □

Definição 5.64. *(Função de Cantor)* Primeiramente construiremos por etapas a função de Cantor, denotada por ϕ, no conjunto $\mathbf{C}^{\mathsf{c}}$ e em seguida definiremos ϕ em $\mathbf{C}$ de modo que esta esteja bem definida no intervalo $[0, 1]$.

Etapa 1. Definimos

$$\phi_1(x) \equiv \frac{1}{2}, \quad \text{em} \quad \mathbf{C}_1^{\mathsf{c}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Etapa 2. Definimos ϕ_2, estendendo ϕ_1, definida em $\mathbf{C}_2^{\mathsf{c}} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ da seguinte forma

$$\phi_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{se } x \in \left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{2}{9}\right) \\ \phi_1(x) = \dfrac{1}{2}, & \text{se } x \in \mathbf{C_1^c} \\ \dfrac{3}{4}, & \text{se } x \in \left(\dfrac{7}{9}, \dfrac{8}{9}\right) \end{cases}$$

Etapa 3. Estendemos ϕ_2 da segunte forma:

$$\phi_3(x) = \begin{cases} \phi_2(x), & \text{se } x \in \mathbf{C_2^c} \\ \dfrac{1}{8}, & \text{se } x \in \left(\dfrac{1}{27}, \dfrac{2}{27}\right) \\ \dfrac{3}{8}, & \text{se } x \in \left(\dfrac{7}{27}, \dfrac{8}{27}\right) \\ \dfrac{5}{8}, & \text{se } x \in \left(\dfrac{19}{27}, \dfrac{20}{27}\right) \\ \dfrac{7}{8}, & \text{se } x \in \left(\dfrac{25}{27}, \dfrac{26}{27}\right) \end{cases}$$

Etapa n. Estendemos ϕ_{n-1} da segunte forma:

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \phi_{n-1}(x), & \text{se } x \in \mathbf{C_{n-1}^c} \\ \dfrac{1}{2^n}, & \text{se } x \in \left(\dfrac{1}{3^n}, \dfrac{2}{3^n}\right) \\ \dfrac{3}{2^n}, & \text{se } x \in \left(\dfrac{7}{3^n}, \dfrac{8}{3^n}\right) \\ \dfrac{5}{2^n}, & \text{se } x \in \left(\dfrac{19}{3^n}, \dfrac{20}{3^n}\right) \\ \dfrac{7}{2^n}, & \text{se } x \in \left(\dfrac{25}{3^n}, \dfrac{26}{3^n}\right) \\ \vdots & \\ \dfrac{2^n-1}{2^n}, & \text{se } x \in \left(\dfrac{3^n-2}{3^n}, \dfrac{3^n-1}{3^n}\right) \end{cases}$$

Por indução, construimos ϕ definida em $\mathbf{C}^c$. Note que, ϕ é monótona não decrescente em $\mathbf{C}^c$.

Assim, resta definir ϕ em $\mathbf{C}$. Para cada $x \in \mathbf{C}$ tome uma sequência (x_n) como da proposição 5.63 e defina $\phi(x)$ por $\phi(x) := \lim \phi(x_n)$. Resta mostrar que ϕ está bem definida. Seja (y_n) uma sequência qualquer tal que $\{y_n\} \subset \mathbf{C}^c$ e $\lim y_n = x$, então $\lim \phi(y_n) = \phi(x)$. De fato, se $\lim \phi(y_n) \neq \phi(x)$, digamos $\lim \phi(y_n) = L > \phi(x)$, teríamos que $\exists\, x_0 \in \mathbf{C}$ e $\exists\, n_0$ tais que $\phi(x) < \phi(x_0) < L$, $\forall n > n_0$. Assim teríamos que $\lim \phi(y_n) > \phi(x)$. Como ϕ é monótona não decrescente em $\mathbf{C}^c$, temos $\lim y_n > x$. Contradição.

Observação 5.65. ϕ é monótona não decrescente em [0,1].

Proposição 5.66. *A função de Cantor é contínua.*

Demonstração. A continuidade é consequência imediata da contrução de ϕ. Se $x \in \mathbf{C}^{\mathsf{c}}$, então ϕ é constante numa vizinhança de x e, portanto, contínua. Se $x \in \mathbf{C}$, então $\lim \phi(x_n) = \phi(x)$ para qualquer sequência (x_n) tal que $x_n \to x$. □

Proposição 5.67. *A função de Cantor não é absolutamente contínua.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.60, temos que se a função é absolutamente contínua então vale o TFC. Seja $\phi(x)$ a função de Cantor no intervalo $[0, 1]$. Temos que

$$\int_0^1 \phi' = \phi(1) - \phi(0).$$

Temos que ϕ é constante em C_k^{c} e $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^{\mathsf{c}} = \mathbf{C}^{\mathsf{c}}$, então $\phi' = 0$ em $\mathbf{C}^{\mathsf{c}}$ e $m(\mathbf{C}^{\mathsf{c}}) = \mathbf{1}$. Logo, $\phi' = 0$ em q.t.p. Segue que

$$0 = \int_0^1 \phi' = \phi(1) - \phi(0).$$

$$0 = 1 - 0.$$

Logo, a função de Cantor não é absolutamente contínua. □

6 Conclusão

Ao final deste trabalho obtivemos uma resposta para a pergunta: é possível estabelecer condições necessárias e suficientes para que uma função satisfaça o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)? Com o auxílio da Teoria da Medida, foi possível estudar as funções absolutamente contínuas e perceber que o TFC vale para uma determinada função se, e somente se, ela é absolutamente contínua. Ou seja, através dessa caracterização temos que tais funções constituem maior classe de funções que satisfazem o TFC, assim respondendo nossos problemas iniciais.

Ainda foi possível perceber que a integral de Lebesgue se apresenta como uma generalização da Integral de Riemann, contornando diversos problemas que não podem ser resolvidos pela Integral de Riemann. Percebemos ainda que diversos teoremas não apresentam contrapartida na integral de Riemann e que a classe de funções integráveis à Riemann é menor do que integráveis à Lebesgue.

A produção deste trabalho teve papel importante na complementação de minha formação acadêmica, visto que não é usual que cursos de graduação em Licenciatura em Matemática abordem a Teoria da Medida em seus currículos. Durante tal produção foi possível estudar alguns casos de funções não integráveis à Riemann e uma área da Análise Matemática antes desconhecida por mim, bem como uma nova forma de integração.

Referências

[1] ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura**. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2006.

[2] BIEZUNER, Rodney Josué. **Medida e Integração**, 27 de mar. 2012. 28 f. Notas de Aula.

[3] CASTRO JUNIOR, Augusto A. **Curso de teoria da medida**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[4] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

[5] FERNANDES, Rui Loja. **O Integral de Lebesgue**. Disponível em: <http://arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/28/1/Lebesgue.pdf>. Acesso em: 20 de out. 2016.

[6] FERNANDEZ, Pedro J. **Medida e integração**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[7] FIGUEIREDO, Djairo G. **Análise I**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[8] GIL, Antonio C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5º ed. São Paulo: Atlas, 2010.

[9] ISNARD, Carlos. **Introdução à medida e integração**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[10] KATZ, Victor J. **História da matemática**. 2. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

[11] LIMA, Elon L. **Curso de análise**. 14º ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. Vol 1.

[12] ROYDEN, Halsey L. **Real Analysis**. 3º ed. New York: Macmillan, 1988.

[13] ROYDEN, Halsey L.; FITZPATRICK, Patrick M. **Real Analysis**. 4º ed. Upper Saddle River: Pearson, 2010.

[14] STRUIK, Dirk J. **História concisa das Matemáticas**. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1992.